Ejercicios Resueltos

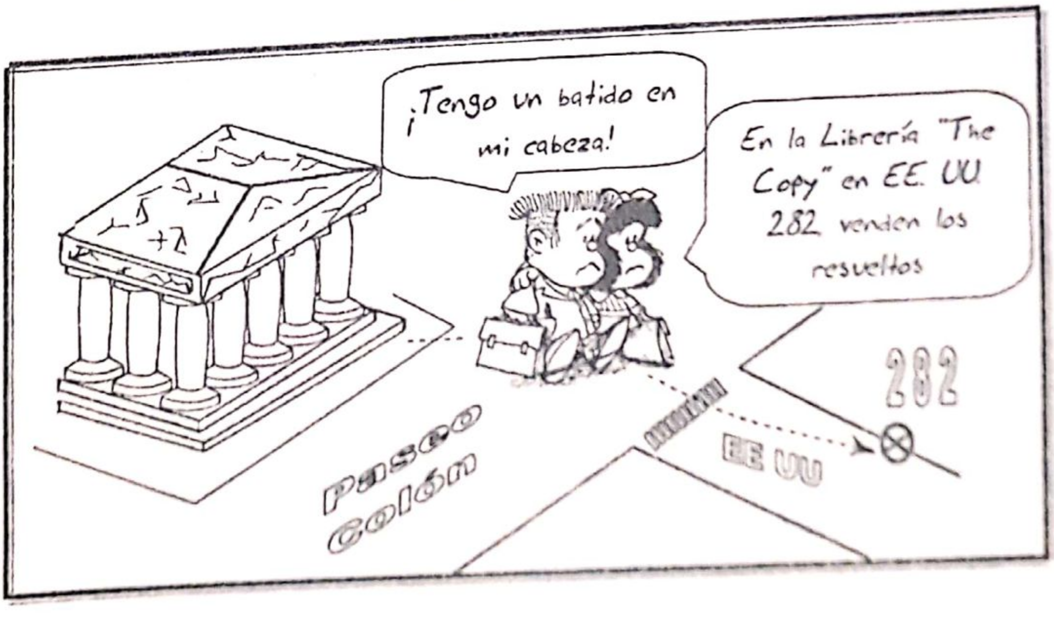
7-1

Física I

Superposición de MAS - Ondas (1ra Parte)

Ejercicio 1 al 14

- Superposición – Interferencia – Batidos – Ondas estacionarias -



Superposición de MAS
Ondas (1^{ra} Parte)

Una onda progresiva o viajera es aquella que se propaga en un medio, de forma tal que la oscilación que provoca a cada punto del medio responde a una ecuación del tipo:

$$y = A.sen(k.x - 2\pi.f.t + \phi_o)$$

Estas ondas son las que estudiamos en el apunte 6 y tienen como característica que la amplitud para cualquier punto y sus vecinos es la misma (es decir, todos los puntos oscilan con la misma amplitud A). El ejemplo típico es la ola en el lago, los puntos de la superficie del agua suben y bajan con el paso de la misma, todos con la misma amplitud. Cuando se tiene un conjunto continuo de ondas viajeras de modo que la oscilación es periódica se suele decir que tenemos un ***tren de ondas***.

1. a) Hallar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones temporales son:

$$x_1 = 6.\text{sen}(2t) \qquad x_2 = 8.\text{sen}(2t + \alpha)$$

si $\alpha = 0$, $\pi/2$ y π

b) Haga un gráfico del movimiento resultante en cada caso

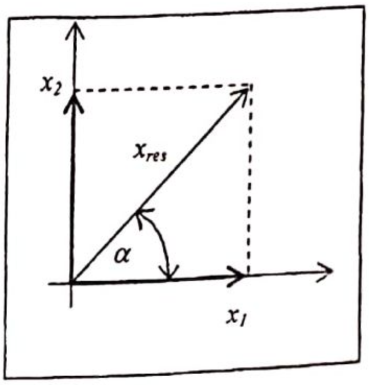
c) Resuelva los puntos a) y b) suponiendo que los movimientos armónicos simples son perpendiculares.

a) en el caso $\alpha = 0$ decimos que las dos ondas están en fase ya que el ángulo dentro del seno es el mismo para todo valor de t. En ese caso vale sumar directo:

$$x_1 + x_2 = 6.\text{sen}(2t) + 8.\text{sen}(2t) = 14.\text{sen}(2.t)$$

En los dos otros casos debemos aprender la técnica "fasorial" para obtener la resultante: para cada onda se usa su amplitud como módulo y su ángulo de fase (el ángulo que se suma a la parte temporal dentro del seno) como argumento. Se tiene:

- en el primer caso $|x_1| = 6$; $\arg(x_1) = 0$
- en el segundo caso $|x_2| = 8$; $\arg(x_2) = \alpha = \pi/2$



La superposición está formada por la suma de estos "vectores". Como son perpendiculares, su módulo se puede obtener haciendo la suma pitagórica de las componentes, mientras que el ángulo de fase se obtiene haciendo uso de la trigonometría:

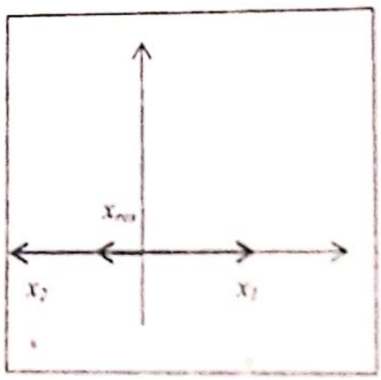
$$x_{res} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = 10 \quad ; \quad tg(\alpha) = \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{6} \quad \rightarrow \quad \alpha = 53{,}13° = 0{,}928 \ rad$$

La ecuación que resulta de la superposición es $x_r = 10.sen(2t + 0{,}928)$

Observar que cuando los MOAS se superponen, resulta un nuevo MOAS pero que su amplitud no es la suma de amplitudes individuales (en el caso $\alpha = 0$ si era la suma, porque estaban en fase; aquí en cambio, como el máximo de uno se alcanza cuando el otro no está en el máximo, la amplitud no es tan grande)

Lo que se ve es un MOAS en el mismo eje que cada una de las perturbaciones individuales, y que tiene amplitud 10. Para el último caso se tiene:

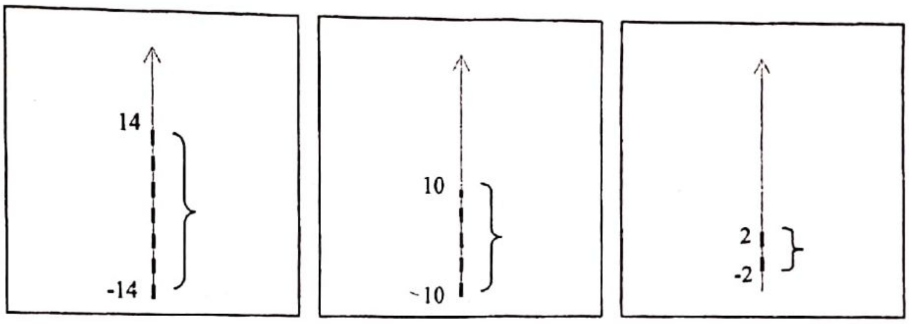
- $|x_1| = 6$; $\arg(x_1) = 0$
- $|x_2| = 8$; $\arg(x_2) = \alpha = \pi$



La superposición está formada por la suma de estos "vectores". Como son opuestos, el módulo se obtiene haciendo la resta de las componentes, mientras que el ángulo de fase vale π (como se ve en el esquema la suma gráfica da hacia atrás). La ecuación que resulta de la superposición es $x_r = 2.sen(2t + \pi)$

Observación: en este caso el movimiento también es un MOAS en el mismo eje donde se tienen las oscilaciones individuales. La construcción "fasorial" no debe confundirse con el movimiento: sólo se trata de una técnica para determinar la amplitud y la fase inicial (que es como decir en que parte de la oscilación se empieza) de la resultante.

b) los esquemas pedidos deben marcarse como la trayectoria de un MOAS sobre un eje. Así, las tres trayectorias son muy parecidas, difieren en la amplitud:



c) en el caso de perturbaciones perpendiculares, es decir la superposición de dos MOAS que oscilan en distintos ejes, la resultante es una perturbación sobre el plano x_1x_2. En ese caso tendremos:

- Para el caso $\alpha = 0$, se puede poner:

$$x_1 = 6.sen(2t) \quad , \quad x_2 = 8.sen(2t) \xrightarrow{despejo \ e \ igualo} sen(2t) = \tfrac{1}{6}.x_1 = \tfrac{1}{8}.x_2$$

Esta última igualdad representa una recta en el plano x_1x_2: $\quad x_2 = \frac{4}{3}.x_1$

- Para el caso $\alpha = \pi/2$, se puede poner:

$$x_1 = 6.sen(2t) \quad , \quad x_2 = 8.sen(2t + \tfrac{\pi}{2}) \xrightarrow{prop. \ trig} x_2 = 8.\cos(2t)$$

Si despejamos las dos funciones trigonométricas, y operando, se llega a la ecuación de una elipse:

$$\tfrac{1}{6}.x_1 = sen(2.t) \quad , \quad \tfrac{1}{8}.x_2 = \cos(2.t) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{x_1}{6}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{8}\right)^2 = 1$$

Esta igualdad representa una elipse en el plano x_1x_2, con semidiámetros $a = 6$ y $b = 8$.

- Para el caso $\alpha = \pi$, se puede poner:

$$x_1 = 6.sen(2.t) \quad , \quad x_2 = 8.sen(2.t + \pi) \xrightarrow{prop.\ trig.} x_2 = -8.sen(2.t)$$

Como en el primer caso, podemos despejar de ambas igualdades a la función trigonométrica y luego igualar:

$$sen(2.t) = \tfrac{1}{6}.x_1 = -\tfrac{1}{8}.x_2$$

Esta última igualdad representa una recta en el plano x_1x_2: $\quad x_2 = -\tfrac{4}{3}.x_1$

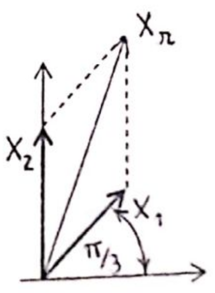
2. a) Encuentre la ecuación del movimiento que resulta de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones horarias son:

$$x_1 = 2.\text{sen}(\text{w.t} + \pi/3) \qquad x_2 = 3.\text{sen}(\text{w.t} + \pi/2)$$

b) trace una gráfica del movimiento resultante

c) resuelva los puntos (a) y (b) suponiendo que los movimientos armónicos simples son perpendiculares

a) usamos la construcción fasorial que vimos en el primer problema, para determinar el módulo y la fase del MOAS resultante. Tenemos dos MOAS de amplitudes 2 y 3 respectivamente. Además, sus fases son $\pi/3$ y $\pi/2$ respectivamente, así que la situación podría representarse como se ve.



Para obtener la amplitud del MOAS resultante de la superposición, se puede descomponer el x_1 y luego sumar componentes con las de x_2

$$x_1 : \begin{cases} 2.\cos(\pi/3).\hat{i} = 1.\hat{i} \\ 2.sen(\pi/3).\hat{j} = 1{,}732.\hat{j} \end{cases}$$

Sumando las componentes con las del x_2, nos queda: $x_r = 1.\hat{i} + 4{,}373\ \hat{j}$

Esta perturbación tiene módulo (amplitud) dada por: $|x_r| = \sqrt{1^2 + (4{,}373)^2} \cong 4{,}837$

Y una fase dada por: $\Phi = artg\left(\frac{4{,}373}{1}\right) \cong 1{,}346$

Por lo tanto la perturbación resultante será: $x_r = 4{,}837.sen(w.t + 1{,}346)$

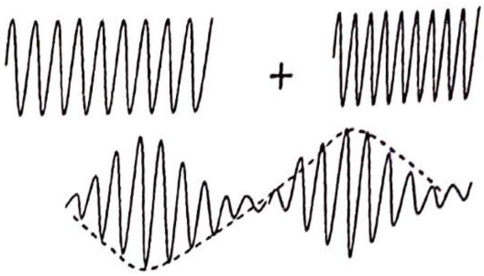
b) Como vimos en el caso anterior, se trata de un MOAS en la misma dirección de los dos MOAS que se superponen.

c) en este último caso se tiene dos MOAS perpendiculares de distinta amplitud. Se puede ver que la resultante es un movimiento plano cuya trayectoria es una elipse. La demostración es más difícil que en el caso (c) anterior, debido a que esta vez la elipse no está orientada con los ejes x_1 x_2. Como no tiene mayor interés, vamos a saltear su demostración.

Batidos

Cuando dos ondas completamente iguales que se propagan en sentido contrario se superponen, dan origen a una onda estacionaria, para la cual hay puntos de interferencia constructiva (los vientres) con máxima amplitud de vibración, y puntos donde la interferencia es destructiva (los nodos), los cuales tiene amplitud de vibración nula.

Cuando dos ondas viajeras tienen frecuencias muy similares, el fenómeno de superposición que se observa es distinto a las estacionarias.



En la figura te muestro dos ondas de ese tipo, con una ligera diferencia en la frecuencia (observar que en un caso las ondas aparecen más ligeramente apretadas que en la otra), que al superponerse en cierto punto dan una resultante como la del último dibujo.

Vemos que tenemos una ***variación de amplitud*** en la resultante. Este efecto se lo llama batido y en el oído se percibe de la siguiente forma: cuando tenemos dos ondas con las características citadas, y cuya diferencia de frecuencia es pequeña, el oído lo percibe como variaciones en la intensidad del sonido (como si alguien subiera y bajara el volumen). Estas variaciones se repiten en forma periódica (en la resultante se marcó en forma envolvente un período, en el cual hay ***dos*** bajadas de intensidad de este tipo), con una frecuencia que es igual a la diferencia de las frecuencias de los sonidos individuales:

$$f_{bat} = | f_2 - f_1 | \qquad (♣)$$

Por último, para el trabajo matemático del asunto, consideremos dos ondas progresivas de frecuencia f_2 y f_1; que se superponen para el mismo punto x del espacio:

$$y_1 = A.\cos(k.x - 2.\pi.f_1.t) \qquad y_2 = A.\cos(k.x - 2.\pi.f_2.t)$$

Usando la identidad que dice: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2.\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

La suma de y_1 e y_2 vale: $\left[2.A.\cos\left(\frac{f_1 - f_2}{2}.t\right)\right].\cos\left(k.x - 2.\pi\,\frac{f_1 + f_2}{2}.t\right)$

En este resultado se distinguen dos pedazos: el que figura en el corchete es una amplitud variable en el tiempo, que oscila con una frecuencia $\frac{f_1-f_2}{2}$. Pero tengamos en cuenta que la cantidad de batidos es la cantidad de veces que el sonido se amortigua, por lo tanto como lo hace dos veces en cada ciclo, la frecuencia del batido es el doble de este número (de aquí sale la expresión (♣)). El último factor es la oscilación de frecuencia promedio, que son las pequeñas onditas que se ven dentro del ciclo mayor en el gráfico de la resultante. De esta forma, el resultado es una onda similar a las dos superpuestas, y la intensidad del sonido disminuye y aumenta con el tiempo según la frecuencia de batido. La cantidad de veces que este efecto se produce es tanto menor entonces, cuanto más parecidas son las ondas superpuestas. Esa característica es la que permite afinar un instrumento musical

3. Un diapasón de 256 hz produce cuatro batidos por segundo cuando se hace sonar junto con otro diapasón de frecuencia desconocida. Indique dos valores posibles de la frecuencia desconocida. Escriba una ecuación para cada onda progresiva y otra para la suma de ambas en un punto del espacio, o sea el $y_{(t)}$ para el batido.

La frecuencia de batido es $f_{bat.} = 4\frac{1}{s}$ y la del diapasón conocido es $256\ \frac{1}{s}$. Por lo tanto, la frecuencia del diapasón desconocido puede ser cualquiera de las soluciones de la expresión que dimos en la página anterior:

$$f_{bat} = |f_2 - f_1| \xrightarrow{\text{reemplazo}} 4\frac{1}{s} = \left|f_2 - 256\frac{1}{s}\right|$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} f_2 - 256\frac{1}{s} = 4\frac{1}{s} & \rightarrow \quad f_2 = 260\frac{1}{s} \\ f_2 - 256\frac{1}{s} = -4\frac{1}{s} & \rightarrow \quad f_2 = 252\frac{1}{s} \end{cases}$$

Tomemos uno de los dos casos y escribamos las ondas progresivas que originan el batido: $f_2 = 260$ hz. Entonces, reemplazamos en las ecuaciones generales de las ondas que dimos en la página 2:

$$y_1 = A.\cos(k.x - 2.\pi.256\tfrac{1}{s}.t) \qquad y_2 = A.\cos(k.x - 2.\pi.260\tfrac{1}{s}.t)$$

Para la resultante de la superposición, se tiene la onda de batido cuya expresión dimos en la página 7:

$$y_{bat.} = y_1 + y_2 = \left[2.A.\cos\left(2.\pi\,.\,2\tfrac{1}{s}.t\right)\right].\cos\left(k.x - 2.\pi\ .258hz.t\right)$$

Como dijimos, en el término de amplitud la frecuencia de su variación es la mitad de la frecuencia de batido, ya que el sonido cambia de intensidad dos veces en cada ciclo.

4. Algunas de las teclas bajas del piano tienen dos cuerdas. En una de estas teclas, una de las cuerdas está ajustada correctamente para producir 100 hz. Al hacer sonar las dos cuerdas al mismo tiempo se oye un batido por segundo. ¿En qué porcentaje es necesario variar la tensión de la cuerda desafinada para que recupere su tono normal? El batido se debe a la superposición de los tonos fundamentales, que son mucho más fuertes que los demás.

Tenemos la frecuencia correcta f_1 = 100 *hz* y la del batido $f_{bat.} = 1\ hz$. Por lo tanto, la cuerda "desafinada" está ejecutando un sonido dado por la expresión

$$\underbrace{f_{bat}}_{1} = \left| f_2 - \underbrace{f_1}_{100} \right| \xrightarrow{\text{reemplazo}} f_2 = 99\ hz$$

Consideramos uno de los dos casos para calcular el cambio necesario en la tensión. Se supuso que f_2 era menor que f_1 porque en general ocurre que las cuerdas se desafinan porque se aflojan, pero eso no está claro del enunciado.

Lo que si dice el enunciado es que las dos frecuencias son las fundamentales de cada cuerda, por lo tanto, usando la expresión de las cuerdas:

$$f_1 = \frac{1}{2.L}.\sqrt{\frac{T}{\mu}} \xrightarrow{despejo} T = 4.L^2.\mu.(f_1)^2$$

Entonces, para la cuerda afinada, que tiene la tensión correcta: $T_{correcta} = 4.L^2.\mu.(100\,hz)^2$

Mientras que la cuerda mal tensada tendrá: $T_{Incorr.} = 4.L^2.\mu.(99\,hz)^2$

Se supone que ambas cuerdas miden lo mismo, y están hechas del mismo material, por lo cual tienen la misma densidad lineal de masa. Entonces, si hago el cociente de las tensiones puedo simplificar:

$$\frac{T_{incorr.}}{T_{corr.}} = \frac{\cancel{4.L^2.\mu}.(99\,hz)^2}{\cancel{4.L^2.\mu}.(100\,hz)^2} \cong 0{,}98$$

Es decir, la tensión incorrecta es un 98 % de la correcta, por lo tanto debemos ***aumentar*** la tensión de la cuerda un 2 % aproximadamente.

Observación: en el caso de plantear que la cuerda tiene una frecuencia estacionaria de 101 *hz* el resultado es similar, pero hay que disminuir la tensión (o sea la tensión incorrecta da un 2 % mayor que la correcta)

5. Una trompetista está afinando su instrumento tocando una nota *LA* simultáneamente con el primer trompetista, que tiene un tono perfecto. La nota del primer trompeta es de 440,0 hz y se oyen 2,6 pulsaciones por segundo. Calcular las posibles frecuencias de la trompetista.

Uso la expresión de la página 7: $f_{bat} = |f_2 - f_1| \xrightarrow{reemplazo} 2{,}6\frac{1}{s} = \left|f_2 - 440\frac{1}{s}\right|$

Y abriendo el módulo: $\begin{cases} f_2 - 440\frac{1}{s} = 2{,}6\frac{1}{s} \rightarrow f_2 = 442{,}6\frac{1}{s} \\ f_2 - 440\frac{1}{s} = -2{,}6\frac{1}{s} \rightarrow f_2 = 437{,}4\frac{1}{s} \end{cases}$

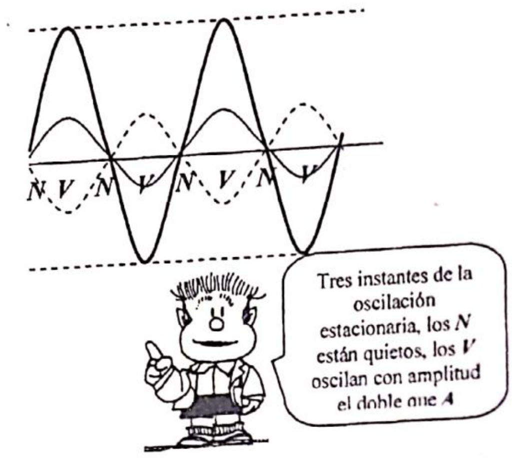
Estas son las dos posibles frecuencias de la trompetista

Ondas estacionarias

Un fenómeno muy curioso se origina cuando tenemos que por un medio se propagan dos trenes de ondas viajeras que son exactamente iguales en todo salvo que se propagan en sentido contrario. En este caso, las ondas dan una perturbación oscilatoria resultante llamada ***onda estacionaria***. La característica de la misma es que su amplitud es distinta aun para puntos vecinos (es decir la amplitud es función de la posición x).

Si bien su forma puede parecer similar (de hecho su ecuación también es una función trigonométrica oscilatoria) esta característica la convierte en una situación distinta a la anterior: existen puntos donde la superposición de los dos trenes de ondas viajeras originan puntos que están permanentemente quietos, decimos que la interferencia de las dos ondas viajeras es ***destructiva*** y a estos puntos los llamamos ***nodos*** de la oscilación.

También existen puntos donde la oscilación tiene el doble de amplitud que la de cada onda viajera individual. Decimos que en estos puntos las ondas interfieren y se superponen en forma ***constructiva***, y estos lugares son llamados ***vientres o antinodos*** de la oscilación.



En los nodos, las ondas viajeras que pasan están "desfasadas en π", es decir, cuando una ola pide subir, la otra pide bajar, y el resultado es la anulación de ambas en todo instante. En los vientres el efecto es reforzarse mutuamente, decimos que están en fase y cuando una pide subir la otra pide lo mismo. La ecuación de dos ondas viajeras de ecuaciones:

$$y_1 = A.sen(k.x - 2\pi.f.t) \qquad y_2 = A.sen(k.x + 2\pi.f.t)$$

Observar que sólo difieren en el signo de la parte temporal, es decir que la única diferencia es que la velocidad de propagación es contraria, y da como resultado una estacionaria de ecuación:

$$y_T = y_1 + y_2 = \underbrace{2.A.sen(k.x)}_{A_{(x)}} \,.\, sen(2\pi.f.t)$$

El primer término de esta ecuación es una amplitud $A_{(x)}$ que depende de la posición, se hace cero en los nodos y toma su máximo valor $2.A$ en los vientres. El 2do término corresponde a la oscilación temporal del MOAS que ejecuta cada punto del medio. Una situación similar se tiene sumando ondas progresivas escritas en función del coseno (ya que se trata de la misma función pero corrida una fase de $\frac{\pi}{2}$)

Los fenómenos de superposición en ondas estacionarias son fundamentales para comprender tanto las ondas que tienen lugar en medios limitados (una cuerda, un parche de un bombo, las cavidades resonantes de un instrumento de viento) como los fenómenos de superposición de luz que dan patrones de interferencia que estudiaremos en la 2da parte.

6. Si las ecuaciones de dos ondas son: $y_1 = 3.cos(5x)\,.\,cos(10.t)$

$$y_2 = 3.sen(5x)\,.\,sen(10.t)$$

Para cada onda halle (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia y (d) la velocidad de propagación. (e) Trace un diagrama de cada onda en el que se muestre la amplitud y la longitud de onda. (f) Escriba las ecuaciones de las ondas progresivas que les dieron origen.

La ecuación general de la onda estacionaria es:

$$y = A.sen(k.x).\,sen(2\pi.f.t) \qquad ó \qquad y = A.sen(\tfrac{2.\pi}{\lambda}.x).\,sen(2\pi.f.t)$$

Atención: también pueden estar escritas con la función coseno.

a) La amplitud es el factor constante que multiplica a las funciones trigonométricas, es decir que para y_1 e y_2 la amplitud vale 3.

b) La longitud de onda se saca por comparación con la expresión general, identificando al factor que multiplica la x:

$$y = A.sen(\overbrace{\tfrac{2.\pi}{\lambda}}^{5}.x).\ sen(2\pi.f.t) \quad \rightarrow \quad \frac{2.\pi}{\lambda} = 5 \quad \xrightarrow{despejo} \quad \frac{2.\pi}{5} = \lambda$$

En ambas ondas es el mismo valor.

c) De la misma forma, comparando con la ecuación general tenemos que la frecuencia está relacionada con el factor que multiplica al tiempo, y para ambas vale:

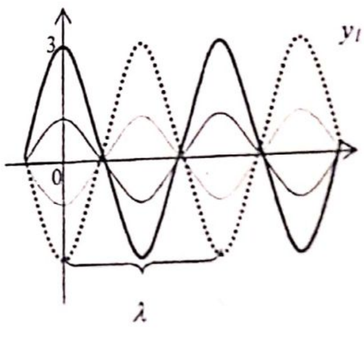
$$y = A.sen(\tfrac{2.\pi}{\lambda}.x).\ sen(\underbrace{2\pi.f}_{10}.t) \quad \rightarrow \quad f = \frac{10}{2.\pi} = \frac{5}{\pi}$$

d) de la relación del cuadernillo 6, para la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de propagación, tenemos:

$$v = \lambda.f = \frac{2.\pi}{5}.\frac{5}{\pi} = 2$$

e) para construir el diagrama de cada onda, basta dibujar una función oscilante de amplitud en los vientres de 3, y distancia entre nodos de la mitad de longitud de onda.

Se dibujó cuatro instantes de la oscilación y_1, con distintos trazos, para mostrar que en los nodos no hay oscilación, y en cambio si la hay en los vientres.



La única diferencia notable entre ambas estacionarias es que mientras que para $x = 0$ en y_1 hay un vientre (ya que cos(0) =1) para y_2 hay un nodo (ya que sen(0) = 0, para todo t)

Scanned by CamScanner

En cuanto al término temporal, que sea un seno o un coseno afecta en el lugar que empieza la oscilación (si en el máximo, o en el mínimo). Pero nada destacable en este diagrama.

f) como vimos en la introducción, las ondas estacionarias se originan en la superposición de 2 ondas viajeras iguales que se propagan en sentido contrario. Estas ondas son del mismo tipo de la resultante (misma longitud de onda, misma frecuencia) pero de la ***mitad de amplitud que la amplitud total de la estacionaria*** (es decir que las viajeras son de amplitud 1,5). Así, para y_1 tenemos que resulta de la superposición de las ondas:

$$y_{+} = 1{,}5.\cos(5.x - 10.t) \qquad y_{-} = 1{,}5.\cos(5.x + 10.t)$$

Donde el subíndice "+" y "-" indica el sentido del eje en que se propaga cada viajera.
Para la y_2 sólo debemos cambiar por el "seno" en ambas ondas viajeras

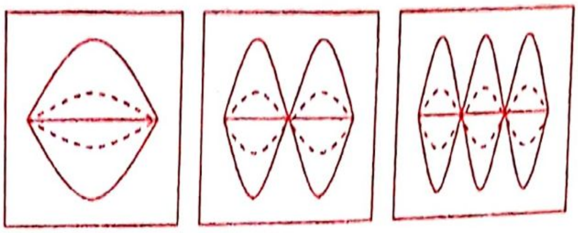
7. Una cuerda estirada de 0,0500 kg vibra con una frecuencia de 25,0 hz en su modo fundamental cuando los soportes a los que está atada la cuerda están separados 0,8 m. La amplitud en el antinodo es de 0,50 cm. Calcular:
a) la velocidad para una onda transversal en la cuerda
b) la tensión en la cuerda

La velocidad de propagación de una onda en una cuerda está dada por la expresión que estudiamos en el cuadernillo 6:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Donde T es la tensión de la cuerda, mientras que $\mu = \frac{masa}{long}$, es la densidad lineal de masa de la cuerda. Cuando una cuerda sujeta por ambos extremos se pone a vibrar, se produce una perturbación que se propaga y refleja en ambos extremos, superponiéndose luego de reflejarse. De esta forma se da origen a ondas estacionarias (la superposición de dos viajeras idénticas en todo pero que se propagan en sentido contrario). Este fenómeno es típico de los instrumentos de cuerda.

La condición que se cumple es que los dos extremos son siempre nodos (no pueden oscilar por estar fijos) por lo tanto la ondas estacionarias que se pueden originar son de este tipo.



La primera es la que tiene mayor longitud de onda (por lo tanto la de menor frecuencia). Su longitud de onda es el doble que el largo L. Provoca el sonido más grave, y se la llama frecuencia fundamental. En la cuerda viene dada por la expresión:

$$f_1 = \frac{v_{prop}}{2.L}$$

Donde L es la longitud de la cuerda. Las siguientes aumentan la cantidad de nodos, tiene una longitud de onda menor (las dibujadas tienen una longitud de onda que es la mitad y la tercera parte de la fundamental), y por ende su frecuencia es cada vez mayor (sonidos más agudos). Se las llaman *armónicos superiores* de la fundamental, y satisfacen la condición de ser múltiplos de dicha frecuencia:

$$f_n = n.\frac{v_{prop}}{2.L} \qquad n = 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \ etc$$

En el sonido de una cuerda de guitarra, se mezclan en la vibración la frecuencia fundamental y todos sus armónicos. Pero con el paso del tiempo desaparecen primero las armónicas más agudas y por último deja de escucharse la fundamental. Por este motivo, el tono del sonido en la cuerda luego de provocar una perturbación tiende a escucharse más grave a medida que transcurre el tiempo (en realidad tiende a escucharse sólo el fundamental).

a) los datos del problema son la longitud L de la cuerda (0,8 m), la frecuencia fundamental f_1 de oscilación, y la masa de la soga M = 0,05 kg. En cuanto al dato de la amplitud en el antinodo (o vientre), veremos que no se necesita para trabajar.

De la expresión de la frecuencia de oscilación fundamental para el caso de una cuerda fija en sus extremos:

$$f_1 = \frac{v_{prop}}{2.L} \xrightarrow{datos} 25\,\tfrac{1}{s} = \frac{v_{prop}}{2.0{,}8\ m} \xrightarrow{despejo} v_{prop} = 40\,\tfrac{m}{s}$$

b) La tensión de la cuerda se relaciona con la velocidad de propagación de las ondas, mediante:

$$v_{prop.} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \xrightarrow{despejo} T = \mu\,.(v_p)^2$$

Calculemos la densidad lineal de masa con la definición: $\mu = \frac{masa}{long} = \frac{0{,}05\ kg}{0{,}8\ m} = 0{,}0625\frac{kg}{m}$

Reemplazando:

$$T = \mu\,.(v_p)^2 = 0{,}0625\,\tfrac{kg}{m}\,.\,(40\,\tfrac{m}{s})^2 = 100\ \mathrm{N}$$

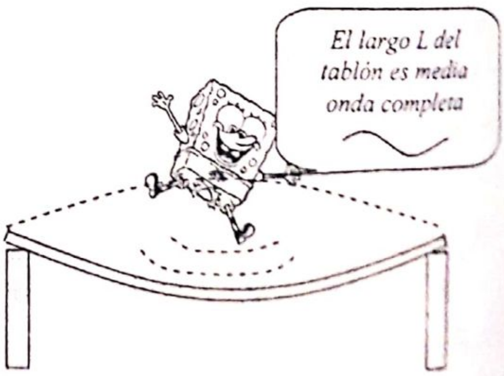
8. Un tablón se coloca sobre un pozo de 5,00 m de ancho. Un estudiante de Física se para a la mitad del tablón y comienza a saltar verticalmente, de modo que salta hacia arriba 2 veces por segundo. El tablón oscila con una amplitud grande que tiene un máximo en su centro.

a) ¿Qué velocidad tiene las ondas transversales en el tablón?

b) ¿Con qué ritmo deberá saltar el estudiante para producir oscilaciones de amplitud grande si está parado a 1,25 m del borde del pozo?

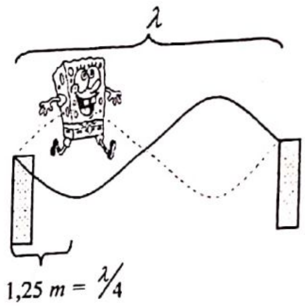
Aclaración: las ondas estacionarias transversales en el tablón tienen nodos en los extremos que descansan en el suelo a cada lado del pozo.

En el caso que la persona salta justo en el centro del tablón tendremos que la oscilación que sufre el tablón acompaña en frecuencia a los saltos de la persona, y se puede ver como una onda estacionaria con nodos en los extremos, y un vientre (máximo de la oscilación) en el centro.



Como vemos en la figura, coincide con la onda estacionaria fundamental de la cuerda que vimos en el problema 3. El largo del tablón es la mitad de la longitud de onda (como en el caso de la fundamental de las cuerdas), ya que contiene a la mitad del dibujo de un ciclo de un seno. La frecuencia de la onda es la que provoca la persona que salta (se supone que la oscilación del tablón está sincronizada a la perturbación, aunque esto puede ser poco creíble). Con estos dos datos, la velocidad de propagación se obtiene de la expresión:

$$v_p = \lambda \,.f = (2.5\ m).2\tfrac{1}{seg} = 20\tfrac{m}{seg}$$



b) La situación ahora cambia, ya que la oscilación tendrá un vientre en el punto donde salta la persona, y tendremos un vientre a 1,25 m del extremo. Como se ve en la figura la distancia entre el extremo (nodo) y el vientre es un cuarto de la longitud de onda. Por lo tanto, en esta onda estacionaria la longitud de onda vale:

$$\frac{\lambda}{4} = 1{,}25\ m \quad \rightarrow \lambda = 5\ m$$

Como se veía en el dibujo, la longitud de onda en este caso correspondía a la longitud completa del tablón. Para sacar la frecuencia con que debe saltar la persona hay que usar la velocidad que sacamos en la parte (a). Esto se puede hacer porque las ondas de las mismas características que se propagan en el mismo tienen la misma velocidad de propagación (por ejemplo, la luz en el vacío, sin importar el color; o el sonido en el aire, sin importar el tono). Por lo tanto, todas las ondas provocadas por saltos sobre el tablón se propagarán por el mismo con $v = 20\frac{m}{s}$. Por lo tanto:

$$v_p = \lambda \,.f \xrightarrow{despejo} f = \frac{20\frac{m}{seg}}{5\ m} = 4\frac{1}{seg}$$

Es decir, la persona debe dar 4 saltos por segundo.

9. Un tubo de 0,6 m de longitud está (a) abierto en ambos extremos y (b) cerrado en uno y abierto en el otro. Halle la frecuencia fundamental y el primer sobretono (primer y segundo armónico respectivamente), si la temperatura del aire es de 27°C. Para cada caso, represente gráficamente la distribución de amplitudes a lo largo del tubo correspondiente a la frecuencia fundamental y al primer sobretono. (c) Escriba las correspondientes ecuaciones para las ondas que se forman en el tubo en ambos casos, indique la ecuación de dos ondas progresivas posibles que hayan generado dichos armónicos.

a) En un tubo abierto en ambos extremos ocurren ondas estacionarias que tienen ***vientres en ambos extremos***. Por lo tanto la situación es similar al caso de la cuerda (con la diferencia que en aquel caso los extremos de la cuerda eran nodos). Pero las frecuencias estacionarias que pueden obtenerse también cumplen:

$$f_n = n.f_1 = n.\frac{v_{prop}}{2.L} \qquad (n = 1;\ 2\ ;\ 3\ ;\ etc)$$

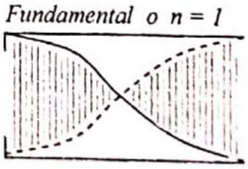
En este caso la velocidad de propagación de la onda es la del sonido en el aire, la cual está dada por la fórmula:

$$v_{son} = \sqrt{\frac{\gamma.R.T}{M}}$$

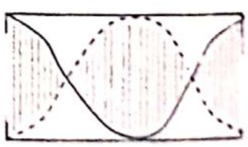
Donde $\gamma = 1{,}4$ para el aire (es el cociente del calor específico a presión y volumen constante), R es la constante de los gases ideales (en unidades MKS: $8{,}31\,\frac{joule}{K.mol}$), T es la temperatura absoluta y M es el peso molecular medio del aire ($28{,}8.10^{-3}\,\frac{kg}{mol}$). Esta cuenta para $T = 27\ °C = 300\ K$ nos da: $v_{son} = 348\,\frac{m}{s}$.

La distribución de amplitudes que nos piden que representemos es la análoga a las amplitudes de la cuerda que vibra, pero usando vientres en los extremos.

Fundamental o $n = 1$



1^{er} sobretono

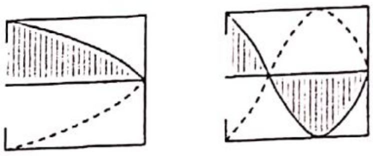


Las líneas verticales representan el valor de la amplitud del movimiento oscilatorio. Como vemos, en ambos casos tenemos que es máxima en los extremos del tubo (los vientres). En el primer caso tenemos la mayor amplitud de onda posible, cuyos dos extremos son vientres, que entra dentro la longitud del tubo. Se trata del sonido de menor frecuencia, la fundamental. El siguiente es de la mitad de longitud de onda, es decir el de doble de frecuencia (2^{do} armónico, $n = 2$). Sin embargo, es muy importante observar que esta distribución de amplitudes es un esquema y no el movimiento físico de la onda: ***el sonido es una onda longitudinal, que provoca una oscilación paralela al eje del tubo, estas líneas verticales son un esquema de la amplitud de la oscilación longitudinal.*** No es el mismo caso que para la cuerda.

Las frecuencias en nuestro caso serán: $f_n = n.\dfrac{348\,\frac{m}{s}}{1{,}2\,m}$ $(n = 1;\,2\,;\,3\,...)$

b) en el tubo cerrado en uno de sus extremos, las ondas estacionarias que se producen en el tubo siempre tienen ***un vientre en el extremo abierto, y un nodo en el cerrado.***

De esta forma, la onda estacionaria de mayor longitud de onda, y la que le sigue, tienen una representación de amplitudes del tipo



Observar que mientras que para la fundamental la longitud de onda equivale a un cuarto de su longitud de onda, para la armónica siguiente, equivale a tres cuartos de su longitud de onda. Y así como la longitud de onda es la tercera parte, la frecuencia es el triple. Esto es general para los tubos que tienen un extremo cerrado: las frecuencias posibles no son todos los armónicos de la fundamental, sino los múltiplos impares. La expresión de la fundamental es: $f_1 = \dfrac{v_{prop}}{4.L}$

Esta vez en el divisor va un 4 porque la longitud de onda es cuatro veces la longitud L del tubo. Los "sobre tonos" o armónicos de esta frecuencia son los múltiplos impares, para usar la notación de la cátedra las escribimos como:

$$f_n = (2n-1).\frac{v_{prop}}{4.L} \qquad n = 1\ ;\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \ etc.$$

Reemplazando los datos:

$$f_n = (2n-1).\frac{348\ \frac{m}{s}}{2{,}4\ m} \qquad n = 1\ ;\ 2\ ,\ 3\ \ ...$$

c) las ondas estacionarias que se originan en el tubo están provocadas por la superposición de dos viajeras idénticas pero que se propagan en sentido opuesto. Tienen la misma longitud de onda y frecuencia que la estacionaria, pero sus amplitudes son la mitad que la de la estacionaria. Como no nos dicen cuál es la amplitud de la estacionaria, llamamos A a su amplitud. La frecuencia está dada por la expresión de arriba, y su longitud de onda sale de la relación:

$$\lambda_n = \frac{v_{prop.}}{f_n} = \frac{4.L}{(2n-1)}$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación de las ondas viajeras, tendremos para lograr cada armónico de orden n se deben superponer dos viajeras:

$$y_+ = \frac{A}{2}.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}.x - 2.\pi.f_n.t\right) \qquad y_- = \frac{A}{2}.sen\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}.x + 2.\pi.f_n.t\right)$$

10. Un tubo de órgano tiene dos armónicos sucesivos de 400 y 560 hz. La velocidad del sonido en el aire es de 344 $\frac{m}{s}$

a) ¿El tubo es abierto o cerrado?

b) ¿De qué armónico se trata?

c) ¿Qué longitud tiene el tubo?

a) En el ejercicio anterior vimos que para cada tipo de tubos las frecuencias armónicas estacionarias que se generan están dadas por expresiones distintas. Supongamos que se trata del caso tubo abierto (es decir, con ambos extremos abiertos). Se tendrá que, para algún "n", un armónico será:

$$f_n = n.f_1 = 400\ hz$$

Y el armónico consecutivo $n + 1$: $(n+1).f_1 = 560\ hz$

De estas condiciones despejo n. Para eso, saco de la 1[ra] ecuación: $f_1 = \dfrac{400\ hz}{n}$

Y reemplazo en la 2[da]:

$$(n+1).\frac{400\ hz}{n} = 560\ hz \rightarrow \frac{400.n+400}{n} = 560$$

$$400.n + 400 = 560.n \rightarrow 400 = \underbrace{560.n - 400.n}_{160.n} \rightarrow n = 2{,}5$$

Este valor es inaceptable, porque el armónico debe ser un número natural. Probemos entonces con la expresión de las frecuencias para el tubo cerrado en un extremo.

Para la primera frecuencia se tiene $(2.n-1).f_1 = 400\ hz$

Y la consecutiva será: $(2.(n+1)-1).f_1 = 560\ hz \rightarrow (2.n+1).f_1 = 560$

Nuevamente tenemos un sistema de dos ecuaciones. Despejo de la 1[ra]:

$$(2.n-1).f_1 = 400\ hz \rightarrow f_1 = \frac{400\ hz}{2.n-1}$$

Y reemplazo en la 2[da]:

$$(2.n+1).\frac{400\ hz}{2.n-1} = 560\ hz \rightarrow 800.n + 400 = 560.(2n-1)$$

$$800.n + 400 = 1120.n - 560 \xrightarrow{despejo} n = \frac{400+560}{1120-800} = \frac{960}{320} = 3$$

Este "n" es natural, por lo tanto se trata del tubo cerrado en un extremo. Los armónicos de los que estamos hablando resultan ser $2.n - 1 = 5$ y $2.n + 1 = 7$

Por último, de la expresión de las frecuencias armónicas se puede despejar:

$$f_n = (2n-1).\frac{v_{prop}}{4.L} \xrightarrow{n=3\ ,\ v=344} 400 = 5.\frac{344}{4.L} \xrightarrow{despejo} L = 1{,}075\,m$$

11. *Tubos distintos sobretonos iguales*. En el caso de un par de tubos de órgano, el primer sobretono (cuya frecuencia es tres veces la fundamental) del tubo cerrado tiene la misma frecuencia del primer sobretono (cuya frecuencia es dos veces la fundamental) del tubo abierto. ¿Cuál es la relación de las longitudes de los tubos?

Para el caso del tubo cerrado, el primer sobre tono ($n = 2$) tiene frecuencia:

$$f_2 = (2.\underbrace{2}_{n} - 1).f_1 = 3.\frac{v_{son}}{4.L_C}$$

En el caso del tubo abierto el primer sobre tono ($n = 2$) tiene frecuencia:

$$f_2 = \underbrace{2}_{n}.f_1 = 2.\frac{v_{son}}{2.L_A} = \frac{v_{son}}{L_A}$$

La consigna del problema es que las frecuencias de ambos "sobre tonos" son iguales, por lo tanto igualo y despejo la relación entre las longitudes L_C del tubo cerrado y L_A del tubo abierto:

$$f_2 = f_2 \rightarrow 3.\frac{v_{son}}{4.L_C} = \frac{v_{son}}{L_A} \rightarrow \frac{L_C}{L_A} = \frac{3}{4}$$

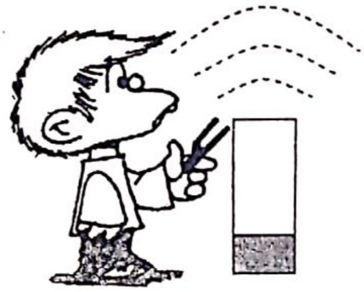
Observación: la velocidad del sonido es la misma en ambos tubos, por eso se puede cancelar.

12. Uso de la resonancia para determinar la velocidad del sonido. Un diapasón de frecuencia 256 hz está cerca de la boca una probeta. El sonido producido es débil, pero si se vierte una determinada cantidad de agua en la probeta, se oye más fuerte. Cuando esto ocurre es porque se han sumado las vibraciones del diapasón con las de la columna de aire. Supóngase que la longitud de la columna de aire que ocasiona el sonido más fuerte es 0.31 m, ¿cuál será el valor de la velocidad del sonido en el aire, en una primera aproximación? (Para mayor precisión es necesario hacer una corrección, pues el nodo de presión se encuentra bastante más allá del extremo de la columna de aire) Si el valor de la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s ¿dónde está ubicado dicho nodo de presión. Diseñe un

experimento que le permita hacer dicho cálculo, ¿cuánto debería medir la probeta? ¿qué error porcentual cometen si no realizan esta corrección?

Este problema es bastante complicado de analizar, por lo que conviene ir despacio. En primer lugar te cuento que el diapasón es un instrumento que produce un sonido de una frecuencia única, conocida y determinada. Esta propiedad es poco común (por ejemplo, en el caso de la guitarra, la frecuencia de cada cuerda depende de la Tensión y por eso hay que afinarla cada tanto). Por este motivo, el diapasón es muy usado cuando necesitamos tomar frecuencias de referencia.

En segundo lugar, veamos qué es lo que ocurre dentro del vaso: la columna de agua que aumenta cambia la longitud de la columna de aire dentro de la probeta. Entonces, se tiene un sistema similar a un tubo cerrado en un extremo (el fondo con agua).



Dentro se pueden producir ondas estacionarias, y cuando alguna tiene la misma frecuencia que el sonido del diapasón se refuerzan, y el sonido se escucha con más intensidad.
Por lo tanto, la experiencia consiste en agregar de a poco el agua, hasta percibir que el sonido del diapasón aumenta (como dijimos, no es el diapasón, sino la superposición con la estacionaria de la misma frecuencia que se genera en la probeta). Se mide la longitud de la columna de aire (desde el agua hasta la boca de la probeta): esta longitud nos dice el problema que da 0,31 m. Corresponde al largo L del tubo en las expresiones de las frecuencias estacionarias.

La primera vez que se escucha este aumento en la intensidad es cuando la estacionaria lograda dentro de la probeta es la de mayor longitud de onda (la fundamental).

Como vimos en el caso de los tubos cerrados, la distribución de intensidad sigue un esquema como el del dibujo, por lo cual sabemos que la longitud total del tubo es la cuarta parte de la longitud de onda. Por lo tanto, de la medición del largo del tubo averiguo el valor de "λ":

$$L = \frac{\lambda}{4} \rightarrow \lambda = 4.L = 1{,}24\ m$$

Y como dijimos, el efecto de refuerzo en la intensidad se da porque esta estacionaria tiene la misma frecuencia que el sonido del diapasón: 256 hz. Entonces:

$$v_{prop.} = \lambda . f = 1{,}24\ m\ 256\ \tfrac{1}{s} = 317{,}44\ m/s$$

Esta es la velocidad del sonido en el aire dentro de la probeta. Sirve como primera aproximación al valor real, pero tiene 7% de error respecto del valor 340 *m/s* que nos da la guía. La explicación a esto es la siguiente: en los instrumentos de aire adelantamos que las estacionarias que aparecen en un tubo cerrado tienen un nodo en la pared donde se reflejan, y un punto de máxima amplitud cercano a la boca del tubo. Nosotros hemos supuesto que se encuentra exactamente en la boca del tubo (ya que λ se averiguó tomando L como la distancia hasta la boca, cuando en realidad lo correcto sería medir hasta donde ocurre este máximo). Entonces, hagamos las cosas al revés, usemos como conocida la velocidad de propagación que nos da la guía, y la frecuencia del diapasón, y de allí despejo el valor L:

$$v_{prop.} = \lambda . f \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{340\ \frac{m}{s}}{256\,hz} = 1{,}328\ m \quad \rightarrow \quad L = \frac{\lambda}{4} = 0{,}332\,m$$

Esta es la verdadera magnitud del L de la columna de aire donde se producen las estacionarias. Por lo tanto, como la boca se encontraba a 0,31 *m* por encima del agua, este valor nos dice que el máximo de amplitud se produce a una distancia d = 0,022m aproximadamente por encima de la boca de la probeta.

Interferencia

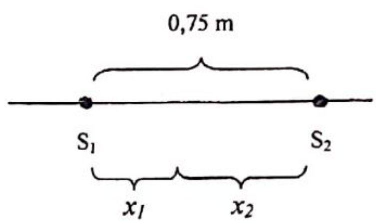
13. Dos fuentes de sonido sincronizadas envían ondas de igual intensidad a una frecuencia de 680 Hz. Las fuentes están separadas 0,75 m. La velocidad del sonido en aire es de 340

m/s Halle las posiciones de mínima intensidad: (a) en una línea que pasa por las fuentes, (b) en un plano que es el bisector perpendicular de la línea que une las fuentes y (c) en el plano que contiene a las dos fuentes. (d) ¿La intensidad es cero en cualquiera de los mínimos?

El término "sincronizadas" está usado en el sentido de que ambas son emitidas con la misma fase. Podemos entonces darnos cuenta de inmediato que el punto medio entre las fuentes debe ser un máximo, ya que las dos ondas recorren el mismo camino.

Pero si hacemos un esquema vamos a darnos cuenta que en la línea que une las dos fuentes podemos tomar dos zonas.

- la zona exterior, para la cual las ondas provenientes de las dos fuentes siempre tiene una diferencia de camino recorrido igual a 0,75 m (es decir igual a la distancia que separa las fuentes)



- la zona interior, para la cual la diferencia de camino es $x_2 - x_1$. Para estas distancias se cumple que: $x_2 + x_1 = 0{,}75\ m$

Veamos cuánto vale la longitud de onda del sonido que se propaga:

$$v_{prop.} = \lambda . f \xrightarrow{despejo} \lambda = \frac{v_{prop.}}{f} = \frac{340\ \frac{m}{s}}{680\ hz} = 0{,}5\ m$$

Observemos entonces que con este valor de longitud de onda ***todos los puntos externos son mínimos***, ya que la diferencia de camino recorrido entre el sonido que proviene de S_1 y el que proviene de S_2 es $0{,}75m$, que satisface la relación:

$$\underbrace{x_2 - x_1}_{0{,}75\ m} = (n + \tfrac{1}{2})\underbrace{\lambda}_{0{,}5m} \xrightarrow{despejo} n = 1$$

Que es un número entero. Insisto, a cualquier punto a la izquierda de S_1 o a la derecha de S_2 la diferencia de camino es 1,5 deλ, por lo tanto hay interferencia destructiva.

Para los puntos internos debemos buscar cuáles satisfacen la condición de que la diferencia de camino recorrida sea $(n+\frac{1}{2})\lambda$. Planteo:

$$|x_2 - x_1| = (n+\tfrac{1}{2})\underbrace{\lambda}_{0,5m} \xrightarrow{uso\ x_2+x_1=0,75m} |0,75m - 2.x_1| = (n+\tfrac{1}{2}).0,5\ m$$

Para abrir el módulo usamos el doble signo del lado derecho:

$$0,75m - 2.x_1 = \pm(n+\tfrac{1}{2}).0,5\ m \xrightarrow{despejo} x_1 = \frac{0,75m \pm (n+\frac{1}{2}).0,5\ m}{2}$$

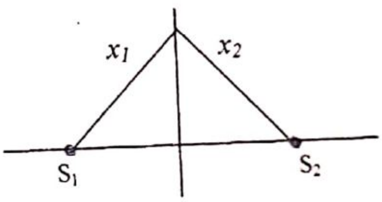
Y ahora le damos valores a n para encontrar las posiciones x_1 (los mínimos medidos desde la fuente S_1):

- $n=0$ $$x_1 = \frac{0,75m \pm (\frac{1}{2}).0,5\ m}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,5m \\ x_1 = 0,25m \end{cases}$$

- $n=1$ $$x_1 = \frac{0,75m \pm (\frac{3}{2}).0,5\ m}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,75m \\ x_1 = 0m \end{cases}$$

Los otros valores exceden la zona interna.

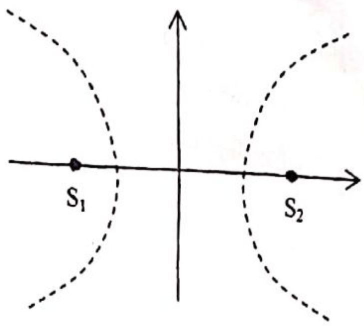
b) para el caso del plano que pasa perpendicular a la línea que los une, y es ***equidistante*** de ambas fuentes, tenemos asegurado que por ser ***equidistante*** la distancia recorrida por la onda sonora es la misma para cualquier punto (ver en el dibujo)



Por lo tanto, si parten en fase y recorren la misma distancia la diferencia de fase al llegar es cero, e interfieren en forma constructiva sobre este plano. No hay mínimos, son todos máximos.

c) En el caso del plano que incluye a los dos puntos, los puntos cuya diferencia de camino es $(n+\frac{1}{2})\lambda$ se pueden escribir como:

$$d(P,S_1)-d(P,S_2)=(n+\tfrac{1}{2}).\lambda \quad (\heartsuit)$$



Tomando el centro de coordenadas en el punto medio, las coordenadas del punto P son (x,y). Las posiciones de las fuentes S_1 y S_2 son (-0,375 m ; 0) y (-0,375 m ; 0).

La condición de la diferencia de distancia ($\heartsuit$) se escribe:

$$\sqrt{(x-0{,}375m)^2+y^2}-\sqrt{(x+0{,}375m)^2+y^2}=(n+\tfrac{1}{2}).0{,}5\,m$$

Elevando al cuadrado de ambos lados un par de veces, se puede llegar a una forma más familiar de esta ecuación (no lo hacemos porque es mucho espacio y no vale la pena). Se trata de la hipérbola. En efecto, si uno se acordaba que la hipérbola son los puntos que están una diferencia de distancia constante respecto de sus dos focos (en este caso las dos fuentes) era obvio que se iba a obtener esta curva. En el dibujo anterior marqué la hipérbola de todos aquellos puntos que están a una diferencia de distancia fija de $\frac{1}{2}\lambda$. Su intersección con el eje x son los dos puntos hallados en (a): $x = \pm\, 0{,}125\ m$ (cuidado porque en este caso se mide desde el centro O, mientras que en (a) medimos desde S_1).

14. ¿Por qué decimos que los fenómenos de interferencia son indicativos de la naturaleza ondulatoria de un proceso? ¿Por qué la coherencia es esencial para la observación de dicho fenómeno? ¿Es posible observar un patrón de interferencia cuando las fuentes tienen (a) frecuencias diferentes, (b) una diferencia de fase fija, (c) una diferencia de fase que varía al azar? Reflexionen con sus docentes cuál es la necesidad de utilizar una fuente láser.

No siempre es claro si algo es una onda o es materia que viaja. Los fenómenos de interferencia son un arma para distinguir el carácter ondulatorio. Por ejemplo, el hecho de que dos rayos de luz que llegan al mismo punto pueden dar una resultante de intensidad 0 (es decir oscuridad) garantiza que la luz es un fenómeno ondulatorio. Si fueran "pelotitas" de materia, con dos rayos debería llegar siempre el doble de "pelotitas" que las que llegan con cada rayo individualmente.

Si bien el carácter ondulatorio de la luz se conocía, no fue fácil diseñar experiencias para observar la interferencia. Esto tiene que ver con una característica fundamental para que haya interferencia: la coherencia. Como se vio en el caso de ondas sonoras, para que este fenómeno se manifieste es necesario que se superpongan ondas de las mismas características: amplitud, frecuencia y fase. En el caso de la luz, los objetos usados para iluminar (lámparas comunes) no sirven para este propósito. La razón es que cuando una lámpara emite luz, cada pedazo del filamento emite rayos muy cortos en duración (menos de 10^{-5} s), con una diferencia de fase que cambia con respecto a sus vecinos. Y para peor lo hace en una cantidad grande de frecuencias (colores) que dan una luz blanca. Todos estos factores hacen que, aunque en un punto del espacio haya interferencia destructiva (oscuridad) en un instante, para una frecuencia, y para la luz que llega de dos pedazos distintos de filamento, esto no sea así para los otros pedazos del filamento, ni para otras frecuencias. Por último, esta circunstancia cambia muy rápidamente con el tiempo. Todo esto hace que resulte imposible que nuestro ojo perciba ningún tipo de interferencia. Si tenemos dos fuentes que emiten luz de la misma longitud de onda, y con una diferencia de fase fija, es posible lograr interferencia.

Para terminar, veamos por qué conviene usar una fuente de luz láser para llevar a cabo estas experiencias. Los láser son dispositivos que emiten luz estimulando un proceso atómico de salto de niveles orbitales. El resultado es una fuente de luz casi monocromática, cuyos trenes de onda duran intervalos de tiempo apreciables. Esto garantiza que la luz de un láser provee una fuente coherente para hacer la experiencia.

Las ondas se superponen
(2^da Parte)

15. Dos ranuras separadas entre sí por 1 mm son iluminadas con luz roja de longitud de onda de 6.10^{-7} m. Las franjas de interferencia son observadas en una pantalla colocada a 1 m de las ranuras. (a) Halle la distancia entre dos franjas brillantes y entre dos oscuras consecutivas. (b) Determine la distancia a la que se encuentran la tercera franja oscura y la quinta brillante de la franja central.

Los datos del problema son:

- la distancia a entre la dos ranuras: $a = 1.10^{-3}\ m$
- la longitud de onda $\lambda = 6.10^{-7}\ m$
- la distancia entre la dos ranuras y la pantalla: $D = 1\ m$

a) Para sacar la distancia entre dos franjas brillantes consecutivas, basta restar dos posiciones "y" de máximos consecutivos, usando la expresión:

$$y_{máx} = \frac{n.\lambda.D}{a}$$

Considero un máximo n y el siguiente $n+1$, y resto ambas expresiones para ver que distancia están separados:

$$y_{N+1} - y_N = \frac{(n+1).\lambda.D}{a} - \frac{n.\lambda.D}{a} = \frac{(n+1-n).\lambda.D}{a} = \frac{\lambda.D}{a}$$

Reemplazo los datos: $$y_{N+1} - y_N = \frac{6.10^{-7}\ m.1m}{1.10^{-3}\ m} = 6.10^{-4}\ m$$

De la misma manera para los mínimos:

$$y_{N+1} - y_N = \frac{((n+1)-\frac{1}{2}).\lambda.D}{a} - \frac{(n-\frac{1}{2}).\lambda.D}{a} = \frac{\lambda.D}{a} = 6.10^{-4}\ m$$

Observación: la distancia entre máximos no depende del n (es decir las franjas brillantes de la pantalla guardan la misma distancia). Lo mismo vale para los mínimos (las franjas oscuras)

b) ubicamos la posición de la 5^{ta} franja brillante, usando $n = 5$ en la expresión

$$y_{máx} = \frac{5.\lambda.D}{a} \xrightarrow{cuenta} y = 3.10^{-3} m = 3\ mm$$

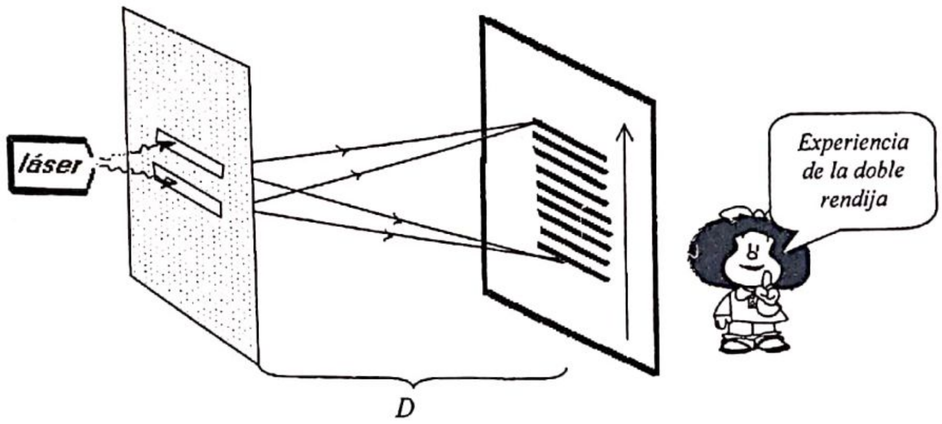
Mientras que para la 3^{ra} oscura, usamos $n = 3$ en la expresión de los mínimos:

$$y_{mím} = \frac{(3-\frac{1}{2}).\lambda.D}{a} \xrightarrow{cuenta} y_{mím} = 1{,}5.10^{-3} m = 1{,}5\ mm$$

16. Las dos ranuras de un experimento de Young están iluminadas con luz de longitudes de onda λ_1 y λ_2. En un mismo diagrama represente la distribución de intensidades para cada longitud de onda y describa el patrón de interferencia observado. Suponga que $\lambda_1 > \lambda_2$. ¿Cuál es el requisito para que los patrones de interferencia se puedan distinguir? En un experimento de Young se utiliza luz blanca. ¿Qué tipo de patrón de interferencia se espera?

Experiencia de Young

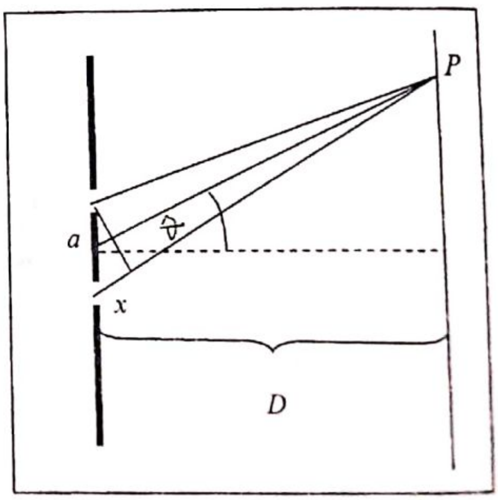
Primero veamos en que consiste la experiencia de Young. Básicamente se divide la luz de una fuente coherente en dos rayos, al dejar pasar sólo la luz que incide sobre dos ranuras. Estas dos ranuras se comportan como dos fuentes distintas, que emiten luz que incide sobre una pantalla. Tenemos garantizada la coherencia de ambas fuentes, porque se trata de luz que viene del mismo láser, por lo tanto tiene la misma frecuencia y están con la misma fase al llegar a las ranuras (esto puede no ser así, porque es prácticamente imposible de lograr que las ranuras estén a la misma distancia del láser emisor, pero lo importante es que de todos modos la diferencia de fase es constante)



A una distancia D se ubica una pantalla, donde se observa la superposición de la luz que emerge de las dos rendijas. El resultado obtenido es una serie de franjas oscuras y claras. Donde los dos haces de luz interfieren constructivamente, aparece una franja clara (se suma la luz de cada rendija). Donde lo hacen destructivamente, aparece una franja oscura. Las franjas se van aclarando y terminan por hacerse difusas.

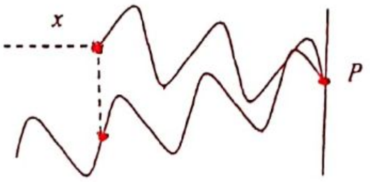
La ubicación de las mismas sobre la pantalla se da mediante un eje y vertical, cuyo 0 hacemos coincidir con la posición de la franja central brillante.

Para determinar su ubicación, consideremos el siguiente esquema: tomemos un punto arbitrario sobre la pantalla P. Sobre él llegan dos rayos de las fuentes S_1 y S_2 (las dos rendijas). Estos dos rayos han recorrido un camino distinto para llegar a P. Por lo tanto entre ellos hay una diferencia de fase constante.



En aquellos puntos de la pantalla ***donde la diferencia de camino recorrido por los rayos sea un múltiplo de la longitud de onda λ de la luz usada, la interferencia resultará constructiva***.

Esto es porque la situación es similar a superponer dos ondas así.



Si la diferencia de recorrido "x" entre ambas es justo la longitud de onda "λ", entonces estarán en fase. Es decir cuando una llegue con su máximo a la pantalla, la otra también le ocurrirá lo mismo. De esta manera, todo el tiempo estarán reforzando su efecto en P, la interferencia será constructiva. Comprendido este tema, todo lo que nos queda es estudiar por geometría como relacionar la diferencia de camino x, con la altura en la pantalla y, y los valores de distancia entre ranuras a y entre pantallas D. Para eso observar que:

$$sen\theta = \frac{x}{a}$$

Por otra parte, también vale θ el ángulo que parte del punto medio con la dirección al punto P. Y del valor de su tangente:

$$tg\theta = \frac{y}{D}$$

Igualando la tangente y el seno (vale porque θ es chico, su seno y su tangente son aproximadamente iguales), se tiene:

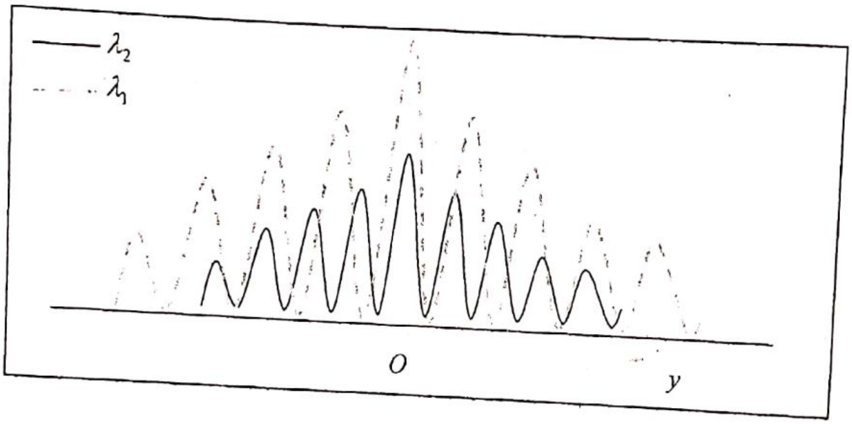
Condición para los máximos la diferencia de camino x es $n\lambda$

$$\frac{y}{D} = \frac{x}{a} \rightarrow \frac{y}{D} = \frac{n.\lambda}{a} \xrightarrow{despejo} y_{máx} = \frac{n.\lambda.D}{a}$$

Esta es la posición de los máximos sobre la pantalla. Con un razonamiento similar, pidiendo que la diferencia de camino x sea media longitud de onda, se tiene la superposición de ondas que interfieren destructivamente (el máximo de una ocurre cuando la otra tiene mínimo). De esa manera se llega a la expresión de la ubicación de las franjas oscuras sobre la pantalla:

$$y_{mim} = \frac{(n-\frac{1}{2}).\lambda.D}{a} \quad (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ...)$$

Con esto podemos contestar que ocurrirá en el caso de usar una luz que no sea monocromática, pero sólo tengamos dos longitudes de onda λ_1 y λ_2. En ese caso, cada color tendrá su propio patrón de rendijas, es decir que sobre la pantalla aparecen franjas de luz λ_1 y otras franjas (corridas) de luz λ_2. Como la posición y de los máximos depende de la longitud de onda, a mayor λ más lejos del $y = 0$ aparece cada franja clara. Por lo tanto esperamos una distribución de intensidades de este tipo:

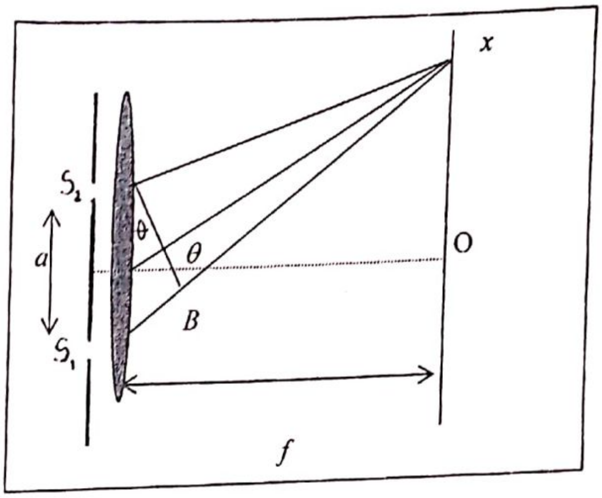


Observar que, como dijimos, el primer máximo de λ_1 está más lejos del centro O de la pantalla que el primer máximo de λ_2.

Si usamos luz blanca esperamos ver este mismo patrón pero para más colores: así se superpondrán los mínimos de algunos con los máximos de otros. Dificilmente se aprecian franjas oscuras, aunque puede ocurrir que si se vean colores o tonalidades (al desaparecer algunos colores en algún lugar, porque allí ocurre un mínimo para esa longitud de onda, puede ser que la luz en la pantalla en ese punto no sea completamente blanca). Por eso decimos que, si bien pueden observarse efectos de la interferencia trabajando con luz blanca, todo es mucho más claro si se lo hace con luz monocromática.

17. Una técnica para observar patrones de interferencia producidos por dos ranuras consiste en iluminarlas con rayos paralelos de luz, colocar una lente convergente detrás del plano de las ranuras y observar el patrón de interferencia en una pantalla situada en el plano focal de la lente. Verifique que la posición de las franjas brillantes con respecto a la franja central está dada por $x = n.(f.\lambda/a)$, mientras que las oscuras corresponden a $x = (2.n+1).(f.\lambda/2.a)$, donde n es un entero, f es la distancia focal de la lente y a es la separación de las ranuras.

El dispositivo utilizado es el que se muestra en este esquema.



Este dispositivo fue usado por el físico Thomas Young para demostrar que la luz era algún fenómeno de tipo ondulatorio. Los rayos que provienen de las dos ranuras se desvían en la lente y concurren en la pantalla ubicada en el plano focal. Fijemos nuestra atención en la interferencia que se produce en el punto x de la misma. Es evidente que estos rayos recorren distancias distintas hasta llegar a x, porque el camino recorrido por el rayo inferior es más largo. La diferencia de camino $r_2 - r_1$ para un ángulo θ pequeño se puede aproximar por la distancia S_1B.

Por trigonometría sobre el triángulo rectángulo S_1BS_2, dicha distancia es el cateto opuesto al ángulo θ, mientras que a (la separación de las ranuras) es la hipotenusa. De esta forma se despeja:

$$r_2 - r_1 \approx S_1 B \xrightarrow{opuesto=hipotenusa.seno} a.sen\theta$$

Esta será la diferencia de caminos entre los dos rayos concurrentes que interfieren en x. Para aquellos puntos de la pantalla donde la diferencia de camino sea un múltiplo entero de la longitud de onda de la luz que se usa, los rayos llegarán en fase, o sea habrá interferencia constructiva. Es decir, el máximo del rayo 1 se superpondrá con otro máximo del rayo 2, lo mismo ocurrirá con sus mínimos, y los efectos de ambos rayos se refuerzan dando lugar a una franja brillante (del doble de brillo que si sólo hubiera una ranura). La condición de interferencia constructiva nos queda:

$$a.sen\theta_{máx} = n.\lambda \qquad (n \in Z) \qquad (\clubsuit)$$

A su vez, del esquema de la página anterior, se observa que en el triángulo AxO, el seno de θ se puede aproximar por la tangente (recordar que esta aproximación es válida para ángulos pequeños) y se puede poner como:

$$tg\theta_{máx} = \frac{x}{f}$$

Juntando estas dos expresiones, se puede poner:

$$a.sen\theta_{máx} \approx a.tg\theta_{máx} = a.\frac{x}{f} \xrightarrow{igualo\ con\ (\clubsuit)} a.\frac{x_{máx}}{f} = n.\lambda \xrightarrow{despejo}$$

$$x_{máx} = n.(\lambda.f / a) \qquad (n \in Z)$$

De la misma forma, la condición para determinar los puntos donde la interferencia es destructiva es que la diferencia de camino entre ambos rayos sea media longitud de onda (o un múltiplo de media longitud de onda). De esa manera, el máximo de un rayo se superpone con el mínimo del otro y la superposición da la destrucción de ambos, observándose franjas oscuras. Sólo debemos cambiar en (♣) por la condición de un múltiplo de media longitud de onda:

$$a.sen\theta_{mín} = (n+\tfrac{1}{2}).\lambda \quad ó \quad \tfrac{2.n+1}{2}.\lambda \qquad (n \in Z)$$

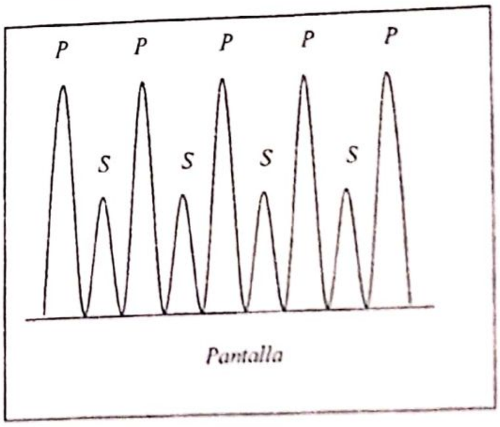
Juntando estas dos expresiones, se puede poner:

$$a.sen\theta_{mín} \approx a.tg\theta_{mín} = a.\frac{x}{f} \xrightarrow{\text{igualo con } (\clubsuit)} a.\frac{x_{mín}}{f} = \frac{2.n+1}{2}.\lambda \xrightarrow{\text{despejo}}$$

$$x_{mín} = (2.n+1).(\lambda.f/2.a) \qquad (n \in Z)$$

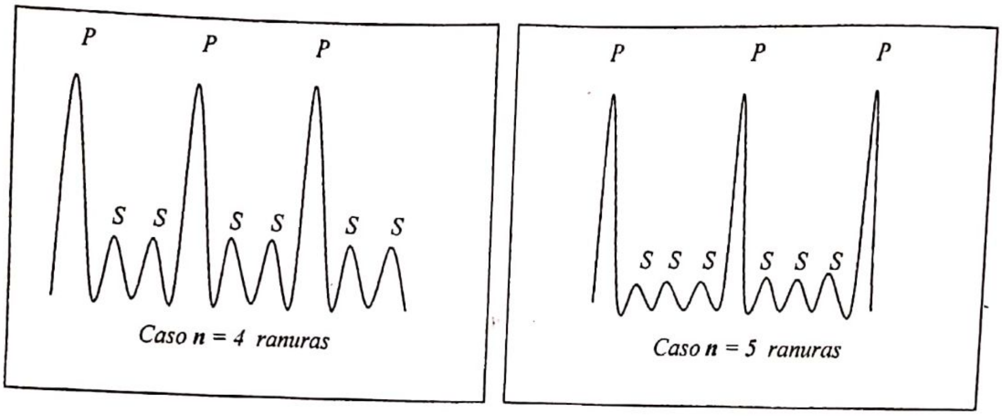
18. Suponga que en lugar de dos ranuras paralelas, como en el experimento de Young, se tienen tres igualmente espaciadas por una distancia *a*. (a) Trace una gráfica del patrón de interferencia observado en una pantalla lejana. (b) Analice la distribución angular de la intensidad para (i) cuatro, (ii) cinco fuentes idénticas espaciadas igualmente por una distancia *a* a lo largo de una línea. Suponga que $a = \lambda/2$. Compare resultados.

(a) para el caso de tres ranura paralelas aparecen una distribución de intensidades de luz en la pantalla como se muestra en el esquema.



Se observa que entre los máximos principales "P" (típicos del diagrama de dos ranuras) aparecen otros máximos secundarios de menor intensidad "S".

(b) esta situación se puede generalizar para el caso de más ranuras; la experiencia indica que aumenta la cantidad de máximos secundarios, de manera que se encuentran "$n - 2$" secundarios entre dos principales. Así tendremos que:



Observación: la posición de los máximos principales no cambia, a pesar de poner más ranuras. Por lo tanto, su ubicación viene dada por la misma expresión que en el caso de dos ranuras visto en la experiencia de Young:

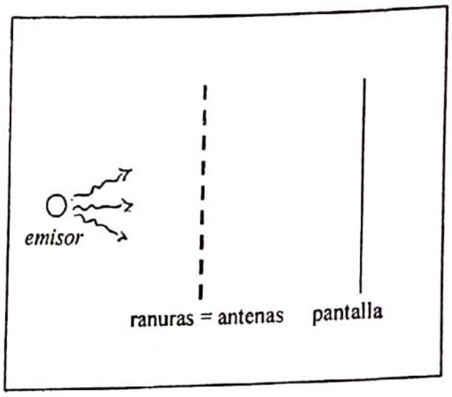
$$n.\lambda = a.sen(\theta_n) \xrightarrow{a=\lambda/2} sen(\theta_n) = 2.n \quad n \in N$$

Observar que para este caso sólo podemos tomar $n = 0$ (otro valor nos da un seno no permitido). En ese caso tendremos máximo principal para $\theta = 0$ únicamente.

Observar también que la intensidad de los máximos "S" se hace menor. Por lo tanto, aumentando el número de ranuras se consigue mejorar la definición de los máximos "P" ya que se hacen más finos y hay menor intensidad de luz entre los "P" (los secundarios molestan en la imagen sobre la pantalla, cuanto menos intensidad tienen, más nítida es dicha imagen, ya que los bordes de los máximos principales se notan con mayor claridad)

19. El primer radiointerferómetro múltiple, construido en 1951, consiste en 32 antenas separadas 7 *m* cada una. El sistema está sintonizado a una longitud de onda de 21 *cm*. Por tanto, el sistema es equivalente a 32 fuentes igualmente espaciadas. Halle (a) la separación angular entre máximos principales sucesivos y (b) el ancho angular del máximo central.

Este radiointerferómetro se puede pensar como 32 ranuras (las antenas) que capturan una parte de la señal que viene del espacio, y la reenvían a una pantalla. Por lo tanto, es equivalente a considerar un arreglo de 32 ranuras por las que pasa señal (radiación electromagnética en la longitud de onda de $\lambda = 21\ cm$).



La separación angular entre dos máximos principales se puede sacar de la expresión que dimos en el problema anterior:

$$n.\lambda = a.sen(\theta_n) \quad \rightarrow \quad \theta_n = arcsen\left(\frac{n.\lambda}{a}\right)$$

Como en este caso λ es mucho menor que a (21 *cm* contra 7 *m*) la ubicación de estos máximos se puede aproximar tomando $sen\theta \cong \theta \ \rightarrow \ \theta = \frac{n.\lambda}{a}$. Así, la distancia entre dos máximos, casi no cambia con el orden (con el "arcoseno" en cambio cambiaría, aunque de nuevo, para los valores centrales sería también muy parecida). Tomando dos consecutivos y restando:

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \frac{(n+1).\lambda}{a} - \frac{n.\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a} = 0{,}03$$

Observación: en caso de trabajar con la expresión completa, sacar el "arcseno" en el modo radianes. Esta separación angular en grados es: $\Delta\theta = \frac{0{,}03.180}{\pi} = 1{,}72°$

b) para sacar el ancho angular del máximo central necesitamos conocer la ubicación del 1er mínimo que tiene a izquierda y derecha. Recordemos del ejercicio anterior que como tenemos 32 fuentes, se encuentran 30 máximos "*S*" entre los principales, y seguramente estos máximos "*P*" se hacen muy delgados. La expresión que nos da la ubicación de los mínimos es:

$$sen(\theta_{mín}) = \frac{n.\lambda}{N.a}$$

Con n y N (N = *número de fuentes*) no múltiplos. Es decir, entre el máximo principal de orden 0 y de orden 1, los valores de n de los mínimos son : 1, 2, 3, ... 31. Entre el máximo de orden 1 y el de orden 2 los valores de n son 33 , 34, 35 ,... 63. La deducción de esta expresión se puede ver en cualquier libro del tema, pero para sugerir un par puede ser el Alonso-Finn (capítulo 34) o con mucho mayor detalle en el "Óptica" de Hecht y Zajac. La cuenta que debemos realizar es entonces es para $n = 1$ (ubicación del 1er mínimo, tanto a izquierda como a derecha del máximo principal central):

$$sen(\theta_{1er\ mín}) = \frac{1.\lambda}{32.a} = 9{,}375.10^{-4}$$

Como se trata de un ángulo muy pequeño, este valor coincide con el valor del ángulo (es decir $sen\theta \cong \theta$). El ancho angular del máximo central es entonces el doble (la distancia entre el primer mínimo del lado izquierdo al primer mínimo del lado derecho).

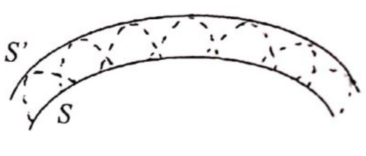
$$Ancho\ Angular = 1{,}875.10^{-3}\ (rad)$$

Comentario: este radiotelescopio interferométrico está en Sydney (Australia). Fue el primero en construirse, pero hoy existen otros más complejos. La longitud de onda de 21 *cm* para la cual están sintonizados no es una elección arbitraria, se trata de una señal emitida por el hidrógeno (el combustible de las estrellas), y es de gran importancia para los astrónomos (tal es así que hay convenios internacionales que prohíben utilizar esta zona del espectro para cualquier actividad). Como esa longitud corresponde a la zona del espectro electromagnético conocido como ondas de radio, se suele usar ese término delante de otras palabras (¿lo notaste? : **radio**interferómetro, **radio**telescopio etc)

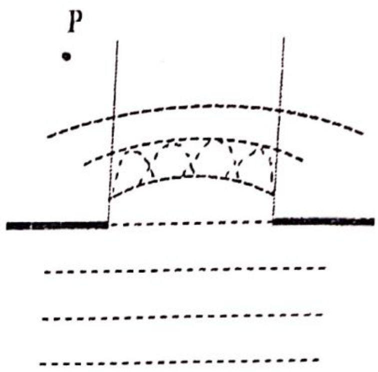
Difracción

20. De qué manera el principio de Huygens ayuda a explicar la forma en que una onda se propaga alrededor de un obstáculo?

El principio de Huygens dice que todos los puntos de un frente de ondas se comportan como nuevos emisores de ondas, los cuales se superponen para formar el frente para un Δt posterior. En el esquema se muestra un frente S, cada punto del mismo emite ondas esféricas (son las semicircunferencias pequeñas), las cuales se superponen para formar el nuevo frente S' (que físicamente representa el avance del S)



Cuando un frente de ondas encuentra un obstáculo al propagarse (en el dibujo, por ejemplo, es una rendija) la parte del frente que puede atravesarla forma el conjunto de nuevos emisores secundarios. El resultado es que el frente de ondas resultante toma la forma de una semicircunferencia. Así, podemos observar que el efecto es que la onda vuelve a avanzar rodeando el obstáculo.



Pensemos que la idea de la luz como rayos que se propagan en línea recta no permitiría predecir que llegue luz a un punto como el P (un punto fuera del cono dado por la ranura, marcado como las dos líneas rectas hacia delante)

21. El efecto de la doble ranura de Young es un efecto de interferencia pura o una mezcla de interferencia y difracción?

Lo primero que quiero aclarar es que los conceptos "interferencia" y "difracción" son dos términos para expresar el mismo fenómeno: la superposición de ondas coherentes. Para ponerlo en palabras de alguien "famoso" como Richard Feynman (premio nobel de física en 1965, uno de los tipos más brillantes que conocí): "***nunca nadie fue capaz de definir la diferencia entre interferencia y difracción en forma satisfactoria. Cuando se habla a la ligera, se usa el término interferencia para el caso de unas cuantas fuentes puntuales, y el término difracción en cambio parece ser más usual para el caso de considerar infinitas fuentes***". Esto es lo que (traducido por mí, palabras más o menos), dice Feynman en su "The Feynman Lectures on Physics, Mainly Mechanics, Radiation and Heat". En biblioteca es posible encontrar la versión traducida.

Interpretando: cuando a cada punto de la abertura de una ranura se lo toma como una fuente, se tiene que estudiamos la superposición de luz proveniente de infinitas fuentes. Así, se habla de difracción. Cuando en cambio tengo que estudiar la luz de dos o tres ranuras, se piensa cada ranura como una fuente, se habla de interferencia. Entonces, "hablando a la ligera": en el experimento de Young de la doble ranura tenemos ambas cosas (hay ranuras = hay difracción; hay varias ranuras = hay interferencia). Aunque, vale aclarar, se puede elegir de forma conveniente los valores de separación entre ranuras y del tamaño de las mismas para que la difracción sea poco apreciable en el diagrama de intensidades que se forma en pantalla.

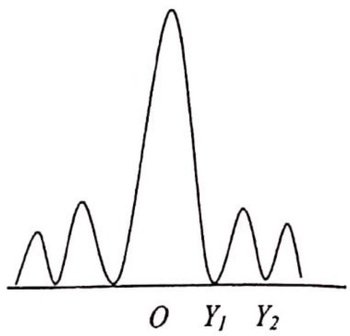
22. ¿Por qué el ancho angular del máximo de difracción central de una ranura es el doble que el de los otros máximos?

Cuando la luz pasa por una rendija de ancho "*b*" comparable con la longitud de onda de la luz incidente, se puede obtener sobre una pantalla alejada una distribución de intensidades de luz conocida como "patrón de difracción" de la ranura. Esencialmente tenemos franjas oscuras y claras. Podemos pensar a las primeras como los lugares donde la interferencia de los "emisores secundarios" del principio de Huygens se superponen en forma destructiva, mientras que las franjas claras es donde la superposición es constructiva. Los ángulos para los cuales se producen los mínimos, medidos desde la normal a la ranura, vienen dados por la expresión:

$$b.sen(\theta_n) = n.\lambda \qquad n \neq 0$$

El valor $n = 0$ corresponde al punto central. Por simetría, la superposición es constructiva y tenemos un máximo de gran amplitud (muy luminoso). Por eso este valor está sacado de la condición de mínimos.

Usualmente, estas franjas oscuras se observan sobre una pantalla, para lo cual se usa una lente en cuyo foco se ubica la pantalla. En ese caso la posición de los mínimos (Y_n) en la pantalla, está dada por:



$$b.\frac{Y_n}{D} = n.\lambda$$

Donde D es la distancia de la abertura a la pantalla (que coincide con la distancia focal de la lente).

Observación: se suelen usar lentes para garantizar que la luz incidente y la que emerge de la ranura formen frentes de onda plano, a fin de lograr lo que se da en llamar difracción de "campo lejano o de Fraunhofer". El motivo es simplificar las cuentas (cuyos resultados vimos arriba para los mínimos). Cuando la pantalla se encuentra cerca de la ranura, la difracción se llama de Fresnel y su resolución matemática es más compleja.

De esta forma, el ancho del máximo central es el doble que la distancia del centro de la pantalla al primer mínimo:

$$b.\frac{Y_n}{D} = n.\lambda \xrightarrow{despejo} Y_1 = \frac{\lambda.D}{b} \rightarrow \quad Ancho = 2.Y_1 = 2.\frac{\lambda.D}{b}$$

En cambio el ancho de cualquier otro máximo es la diferencia entre dos mínimos consecutivos:

$$Y_{n+1} - Y_n = (n+1).\frac{\lambda.D}{b} - n.\frac{\lambda.D}{b} = \frac{\lambda.D}{b}$$

Como vemos es la mitad del ancho del máximo central.

23. Rayos paralelos provenientes de una fuente de luz verde, cuya longitud de onda es $5{,}6.10^{-7}\ m$ pasan por una ranura de 0,4 *mm* de ancho que cubre una lente de 40 *cm* de distancia focal. ¿Cuál es la distancia del máximo central al primer mínimo en una pantalla situada en el plano focal de la lente?

Como vimos en el problema anterior, la posición Y de los mínimos sobre la pantalla viene dada por la expresión

$$Y_n = n.\frac{\lambda.D}{a} \xrightarrow{datos} Y_1 = 1.\frac{5{,}6.10^{-7}\ m.\ 0{,}4\ m}{0{,}4\ .10^{-3}\ m} = 5{,}6.10^{-4}\ m$$

La posición del máximo central es $Y = 0$, por lo tanto el resultado anterior es directamente la distancia pedida.

24. El patrón de difracción de Fraunhofer de una sola ranura se observa en el plano focal de una lente de 1 *m* de distancia focal. El ancho de la ranura es de 0,4 *mm*. La luz incidente contiene dos longitudes de onda λ_1 y λ_2. El cuarto mínimo correspondiente a λ_1 y el quinto a λ_2 se presentan en el mismo punto, a 5 *mm* del máximo central. Calcule λ_1 y λ_2.

Para el cuarto mínimo de λ_1 tenemos:

$$Y_n = n.\frac{\lambda.D}{b} \xrightarrow{datos} Y_4 = 4.\frac{\lambda_1\ .\ 1m}{0{,}4\ .10^{-3}\ m} = 5\ .10^{-3}\ m$$

$$\xrightarrow{despejo} \lambda_1 = \frac{5.10^{-3}\ m.\ 0{,}4.10^{-3}\ m}{4.\ 1m} = 5.10^{-7}\ m$$

Y para el quinto mínimo de λ_2 tenemos:

$$Y_n = n.\frac{\lambda.D}{b} \xrightarrow{datos} Y_5 = 5.\frac{\lambda_2\ .\ 1m}{0{,}4\ .10^{-3}\ m} = 5\ .10^{-3}\ m$$

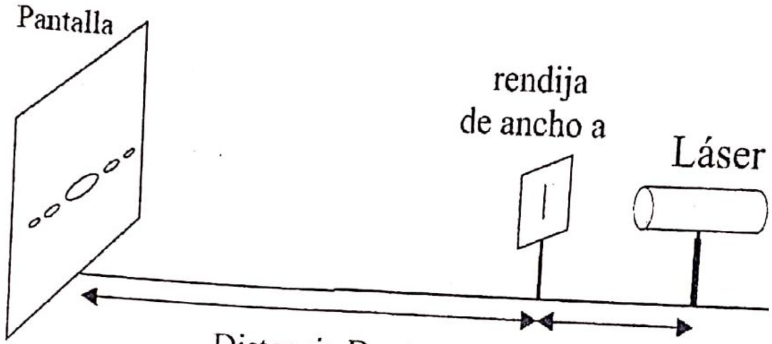
$$\xrightarrow{despejo} \lambda_2 = \frac{5.10^{-3}\ m.\ 0{,}4.10^{-3}\ m}{5.\ 1m} = 4.10^{-7}\ m$$

Ɏ

25. Se quiere medir el ancho de una ranura (0.1 mm) con un error menor al 10%. Indicar como lo haría si cuenta con un puntero láser (longitud de onda 635 nm) …

Vamos a hacerlo a partir de la figura de difracción que ofrece la luz del láser al pasar por la ranura. Obviamente, lo que voy a exponer es un arreglo experimental posible.

Montamos un dispositivo como el de la figura. La idea es ubicar la pantalla alejada de la ranura de manera de cumplir con la aproximación de Fraunhofer. Podemos ubicar la pantalla a 2 m de la ranura.



Sobre la pantalla se mide la posición del primer o segundo mínimo (puede medirse la distancia entre el segundo mínimo a cada lado, y dividirlo por 2 de manera de evitar la dificultad de localizar la posición central, centro de la zona oscura). La posición de los mínimos viene dada por:

$$Y_n = n.\frac{\lambda.D}{a}$$

Se supone que lo que se quiere hacer es medir en forma indirecta el ancho a de la ranura. Conociendo su valor aproximado, podemos determinar la posición del segundo mínimo:

$$Y_n = n.\frac{\lambda.D}{a} \xrightarrow{n=2} Y_2 = 2.\frac{635.10^{-9}\,m.2m}{0{,}1.10^{-3}\,m} \approx 0{,}025\,m \rightarrow Y_2 = 25\ mm$$

Bueno, con esto podemos estimar el orden en el error de cada parámetro que vamos a medir. La idea es que con el arreglo las cosas van a ser al revés: vamos a medir la posición del segundo mínimo (Y_2, con la cinta métrica, error del orden de 1 mm porque hay incerteza en la posición de un mínimo a otro). Como el valor esperado es del orden de 25 *mm*, el error porcentual será del 4%. Otra cosa que vamos a medir es la distancia D a la pantalla. Si el dispositivo se armó de manera de facilitar esa medición, el error cometido con la cinta métrica puede ser del orden de 2 mm sobre 2 *m*, es decir menor al 1%. La longitud de onda del láser puede estimarse como una magnitud libre de error, porque aunque lo tenga debe ser menor a un nanómetro sobre 635, mucho menos que las otras magnitudes. Así, en la pantalla medimos Y_2, sobre el banco de trabajo se mide D, y con la expresión:

$$Y_2 = 2.\frac{\lambda.D}{a} \rightarrow \quad a = 2.\frac{\lambda.D}{Y_2}$$

Se determina el tamaño de la abertura. Propagando el error, éste debe dar menos del 10% .

26. Una luz monocromática plana de $6{,}0.10^{-7}$ *m* de longitud de onda incide perpendicularmente sobre una rejilla de transmisión plana que tiene 500 líneas por *mm*. Determine los ángulos de desviación para los espectros de primero, segundo y tercer orden.

Una red es un arreglo de "muchas" ranuras, de manera tal que la luz incidente luego de incidir en ella emerge formando una figura de "difracción+interferencia". Existen dos tipos de redes, a saber:

- de transmisión: la luz pasa a través de la red. En general se trata de una lámina transparente donde se efectúan rayas equiespaciadas. Las rayas actúan como obstáculos, no dejan pasar la luz. En donde el material no fue rayado, continua siendo transparente y la luz se transmite.

- De reflexión: básicamente son similares a las anteriores, esta vez se raya algún material que refleja luz (puede ser un espejo o una lámina metálica). Las rayas actúan como zonas donde no hay reflexión. Entonces la luz se refleja en las franjas no rayadas, que se comportan como ranuras emisoras

La cantidad de líneas de la red por unidad de longitud (se suele llamar constante de la red) nos permite calcular la distancia *a* de separación entre ranuras. En este caso:

$$a = \frac{1\ mm}{500} = \frac{1.10^{-3}\ m}{500} = 2.\ 10^{-6}\ m$$

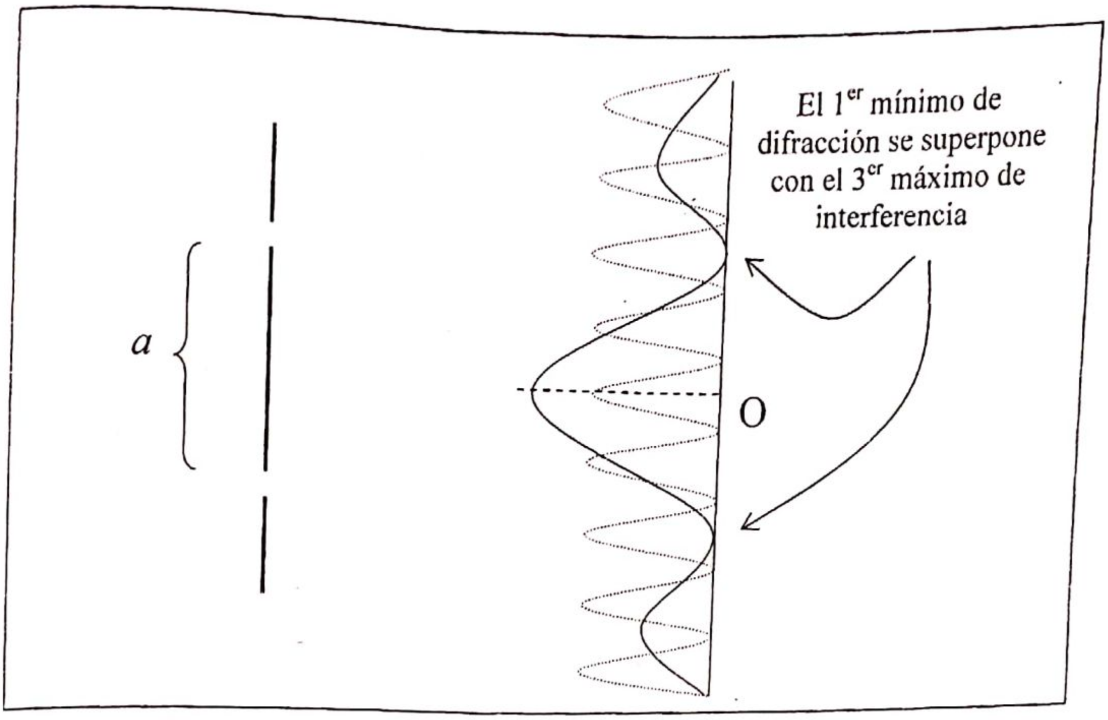
Nos queda determinar el ángulo correspondiente al 1er, 2do y 3er orden de interferencia. Usamos la expresión

$$n.\lambda = a.sen(\theta_n) \xrightarrow{despejo} \begin{cases} sen(\theta_1) = \frac{1.\lambda}{a} = \frac{6.10^{-7}\ m}{2.10^{-6}\ m} = 0{,}3 \\ sen(\theta_2) = \frac{2.\lambda}{a} = \frac{2.6.10^{-7}\ m}{2.10^{-6}\ m} = 0{,}6 \\ sen(\theta_3) = \frac{3.\lambda}{a} = \frac{3.6.10^{-7}\ m}{2.10^{-6}\ m} = 0{,}9 \end{cases}$$

A estos valores del seno corresponden los ángulos: 17° 27' ; 36° 52' y 64° 10'

27. En un patrón de difracción producido por dos ranuras, el tercer máximo principal no se observa debido a que éste coincide con el primer cero de difracción. (a) Encuentre el cociente *a/b* (*a* es la separación entre ranuras y *b* es el ancho de cada una). Represente gráficamente la distribución de intensidades sobre varios máximos a ambos lados del máximo central. (c) Haga un bosquejo de las franjas que aparecerían en una pantalla. (d) repita los puntos (a) (b) y (c) para (i) tres ranuras, (ii) para cinco ranuras.

Tenemos una situación como la del dibujo (en líneas de puntos tenemos el diagrama de interferencia de dos ranuras, en línea llena el de difracción de una ranura)



El diagrama resultante (es decir: lo que verdaderamente se ve en pantalla) es el resultado de las franjas de interferencia modulada en la amplitud por el diagrama de difracción. Lo hacemos en el punto (c). Planteamos:

- 3er máximo de interferencia: $3.\lambda = \frac{a.x}{D} \xrightarrow{despejo} x_3 = \frac{3.\lambda.D}{a}$

- 1er mínimo de interferencia: $1.\lambda = \frac{b.x}{D} \xrightarrow{despejo} x_1 = \frac{1.\lambda.D}{b}$

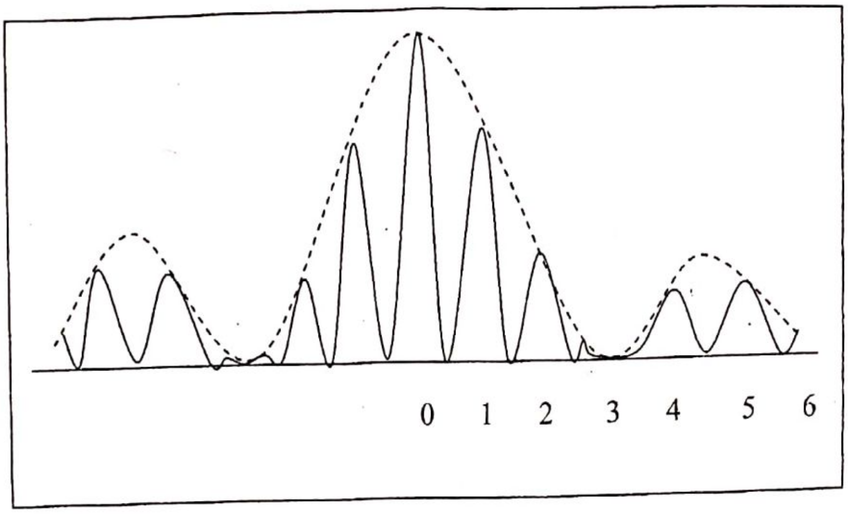
Como la ubicación sobre la pantalla de estos dos puntos coincide, igualamos:

$$\frac{1.\lambda.D}{b} = \frac{3.\lambda.D}{a} \rightarrow \frac{a}{b} = 3$$

Observación: a partir de esta relación se puede ver que también coinciden el 6to máximo de interferencia con el 2do mínimo de difracción. En efecto, el sexto máximo de interferencia se ubica en:

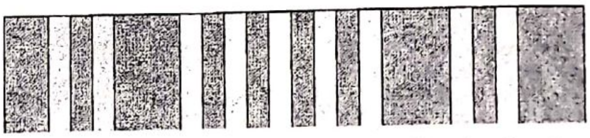
$$6.\lambda = \frac{a.x}{D} \rightarrow x_6 = \frac{6.\lambda.D}{a} \xrightarrow{a=3\,b} x_6 = \frac{2.\lambda.D}{b}$$

Y esta posición coincide con poner $n = 2$ en los mínimos de difracción. Entonces, lo que se observaría en una pantalla es a siguiente distribución de intensidades.



Una pequeña explicación sobre el mismo: los números que figuran debajo corresponden al orden del máximo de interferencia. Como vemos, quedan suprimidos los órdenes 3 y 6. Para hacer el gráfico de la resultante, se moduló en amplitud al gráfico de interferencia, es decir, los máximos de interferencia se estiran o encogen de manera que su altura llega hasta el de difracción (en línea de puntos).

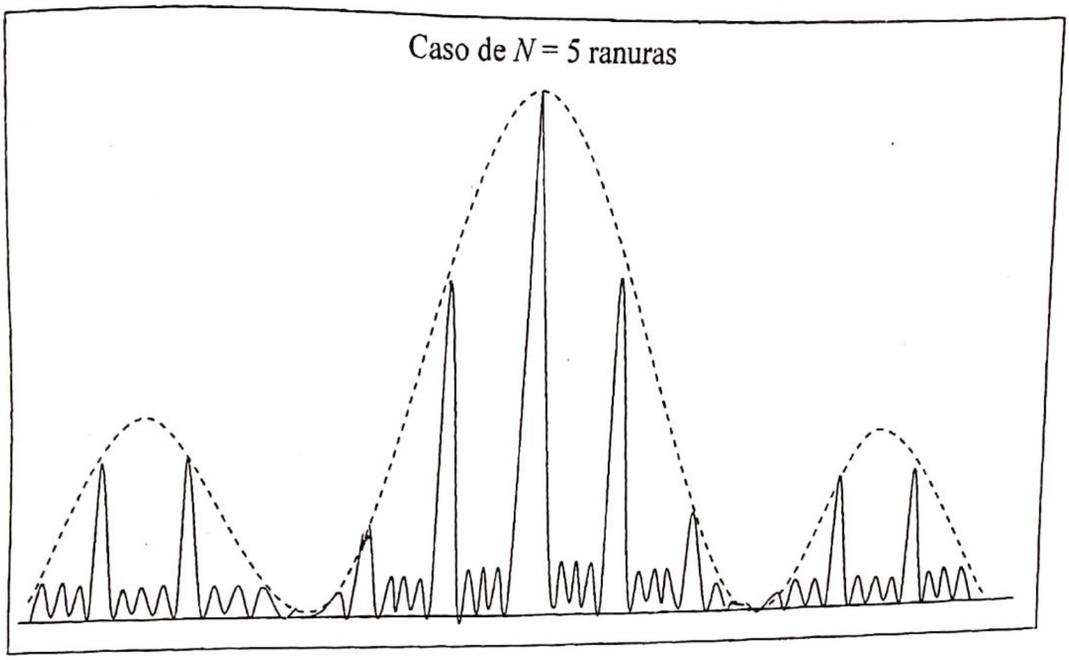
El resultado "visible" para el ojo en la pantalla es ver más luz en las franjas más altas. Se vería entonces algo así:



Nuevamente, los números debajo de las franjas representa la posición de los máximos de interferencia

d) para el caso de tres ranuras que guarden la misma relación a/b, se tiene que hacer apenas un pequeño cambio a los diagramas anteriores. Como vimos en el problema 17, en el diagrama de interferencia aparecen máximos secundarios entre los principales (exactamente $N - 2$, con N = cantidad de ranuras).

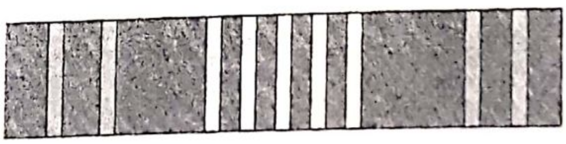
En el caso de 5 ranuras, por ejemplo, tendremos 3 máximos de interferencia secundarios entre los principales. Por lo tanto el diagrama de intensidades sobre la pantalla sería de este estilo:



Observación: la intensidad de los máximos secundarios de interferencia suele ser mucho menor que la de los principales. Por lo tanto es probable que estos pequeños "picos" no sean apreciables, y en el dibujo de las franjas que hicimos en la página anterior apenas se aprecie su presencia. Pero si es importante dibujar más delgadas a las franjas claras (ver conclusiones del problema 18)

El cambio apreciable va a ser el ancho de las franjas. Así, si este es el caso con $N = 2$

Y habrá este cambio con $N = 5$



28. En el laboratorio se utiliza una red de difracción para determinar la longitud de onda de la fuente. La constante de la red es 100 líneas por *cm*, entre la red y la pantalla se miden 3,00 *m* con una incerteza absoluta de $\Delta l = 0{,}05$ *cm*, la separación entre máximos de interferencia consecutivos en la pantalla es de 2,0 *cm* con una incerteza absoluta $\Delta y = 0{,}1$ *cm*. Se observa que el quinto máximo de interferencia no se puede ver por efecto de la difracción. Hallar (a) La longitud de onda de la fuente, (b) la incerteza absoluta, relativa y relativa porcentual de dicha medición. (c) la separación entre ranuras y el grosor de cada ranura. (d) las incertezas cometidas al medir las magnitudes indicadas en (c).

Vamos a trabajar sin reemplazar los valores hasta no llegar a la expresión final de la longitud de onda "λ". El motivo es que para propagar errores vamos a necesitar tener la función de los datos para sacar las derivadas parciales. Empecemos por determinar la distancia entre las ranuras; como vimos en el ejercicio anterior este valor es la inversa de la constante de la red:

$$a = \frac{1\,cm}{100} = 1.10^{-4}\ m$$

Se supone que este dato no tiene error, porque la cantidad de líneas que se marcan en la red se conoce con exactitud. La expresión de la posición de los máximos de interferencia es:

$$\frac{a.\ y_n}{D} = n.\lambda$$

Entonces, la distancia entre dos máximos consecutivos, se obtiene como la resta de las posiciones para "n" y el siguiente "$n+1$":

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n = \frac{(n+1).D.\lambda}{a} - \frac{n.D.\lambda}{a} = \frac{D.\lambda}{a}$$

Despejamos:

$$\lambda = \frac{a.\Delta y}{D} \xrightarrow{datos} \lambda = \frac{1.10^{-4}\ m\ .\ 2.10^{-2}\ m}{3\ m} = 6{,}\widehat{6}.10^{-7}\ m$$

Para despejar el error en esta medida, propagamos sacando la expresión de las derivadas parciales:

$$\lambda = \frac{a.\Delta y}{D} \xrightarrow{derivo} \Delta\lambda = \left|\frac{1.\Delta y}{D}\right| \delta a + \left|\frac{a.1}{D}\right| .\delta(\Delta y) + \left|-\frac{a.\Delta y}{D^2}\right| .\delta D \xrightarrow{datos}$$

$$\Delta\lambda = \frac{2.10^{-4}\,m}{3m}.0 + \frac{1.10^{-4}\,m}{3m}.\ 0{,}1.10^{-2}m + \frac{1.10^{-4}\,m.2.10^{-4}m}{9m^2}.\ 0{,}05.10^{-2}m \cong 3.10^{-8}\,m$$

Corresponde entonces que informemos la magnitud determinada en forma correcta, dando el valor encontrado hasta el decimal en que aparece su error:

$$\lambda = (6{,}7 \pm 0{,}3).10^{-7}\,m$$

El error relativo y porcentual es:

$$e_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{3.10^{-8}\,m}{6{,}\hat{6}.10^{-7}\,m} \cong 0{,}05 \xrightarrow{x\,100} e_{\%} = 5\%$$

c) usemos ahora que el quinto máximo de interferencia coincide con el primer mínimo de la difracción (por ese motivo el 5^{to} máximo de interferencia es el primero que desaparece). Entonces, usando la fórmula vista para los mínimos de difracción:

$$b.\frac{x_1}{D} = 1.\lambda \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{\lambda.D}{b}$$

Y usemos ahora la expresión para el quinto máximo de interferencia:

$$a.\frac{x_5}{D} = 5.\lambda \quad \rightarrow \quad x_5 = \frac{5.\lambda.D}{a}$$

Igualando estas dos posiciones como indica el enunciado:

$$x_{5,máx} = x_{,1,mín} \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda.D}{b} = \frac{5.\lambda.D}{a}$$

$$\xrightarrow{despejo} \quad b = \tfrac{1}{5}.a$$

Usando el valor de a que sacamos en el primer punto, nos queda que $b = 2.10^{-5}\ m$

Este es el tamaño de cada ranura. En cuanto a las incertezas cometidas en estas magnitudes, debemos aclarar que como el valor de a no tiene error (o por lo menos se supone que la información a partir de la cual lo obtuvimos no tiene incerteza), tampoco tiene error la magnitud b.